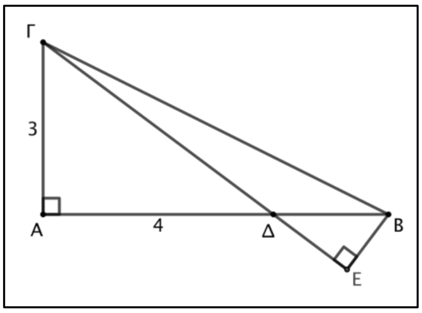
9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$, $AB=6$ και $A\Gamma=3$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΒ, τέτοιο ώστε $A\Delta=4$. Φέρουμε την απόσταση ΒΕ της κορυφής Β από την ΓΔ, όπως φαίνεται στο σχήμα.

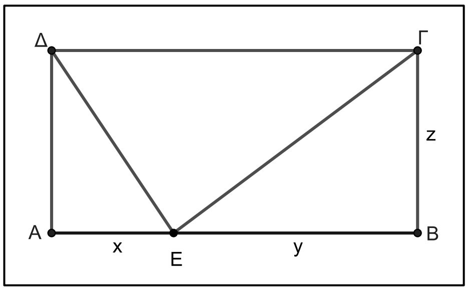


α) Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΒ είναι όμοια.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ.

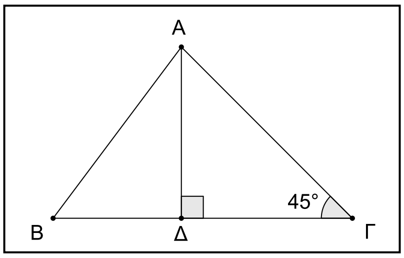
2. Η περίμετρος του ορθογωνίου ΑΒΓΔ του σχήματος είναι 72 και το Ε είναι σημείο στην πλευρά ΑΒ. Τα μήκη των τμημάτων x, y, z είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι $x=8$, $y=16$ και $z=12$.

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΓΕΔ.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $B\Gamma=7$, $\hat{\Gamma}=45^o$ και ύψος $A\Delta=4$.

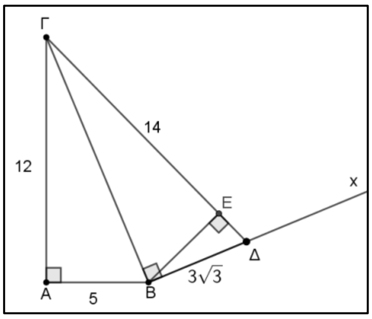


α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\Gamma\Delta=4$, **ii.** $A\Gamma=4\sqrt{2}$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^o$, $A\Gamma=12$ και $AB=5$.



α) Να αποδείξετε ότι $B\Gamma=13$,

β) Φέρουμε ημιευθεία Βx κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Β και παίρνουμε σε αυτή σημείο Δ, τέτοιο ώστε $\Delta\Gamma=14$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι $B\Delta=3\sqrt{3}$.

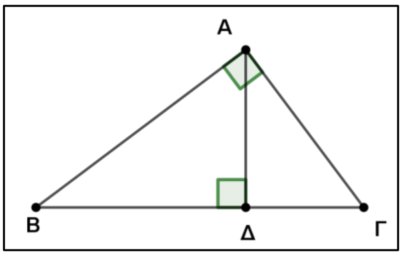
ii. Να υπολογίσετε την προβολή της ΒΔ στην ΔΓ.

5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^o\right)$ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι $B\Gamma=\alpha$, $A\Gamma=\beta$, $AB=\gamma$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha=2R$,

β) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=8R^2$.

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^{o}\right)$ με $ΒΓ=5$ και $ΑΒ=4$. Να υπολογίσετε:

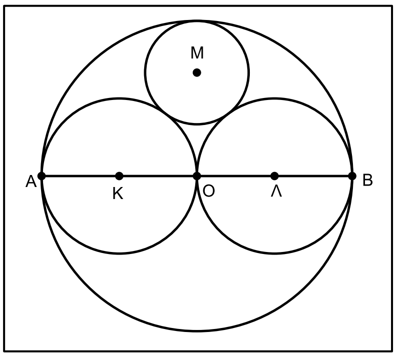


α) την πλευρά ΑΓ.

β) την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στη ΒΓ.

γ) το ύψος ΑΔ.

7. Δύο ίσοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ο. Ένας τρίτος κύκλος (Μ,ρ) εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων Κ και Λ. Με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα 2R γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



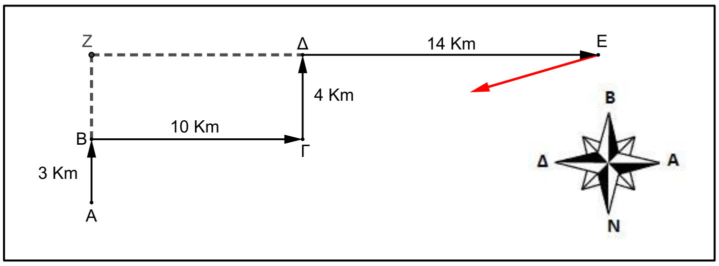
α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι ΚΜ, ΛΜ και ΟΜ των κύκλων με κέντρα Κ, Λ, Μ και Ο και στη στήλη Β τα μήκη των διακέντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίσεις.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
Διάκεντρος	Μήκος
1. ΚΛ	i. R
2. ΛΜ	ii. 2R
3. ΟΜ	iii. R + ρ
	iv. 2R – ρ

β) i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα ΜΟ είναι το ύψος προς τη βάση του.

ii. Να βρείτε την ακτίνα ρ του κύκλου κέντρου Μ ως συνάρτηση του R, όπου R η ακτίνα των κύκλων κέντρων Κ και Λ.

8. Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.

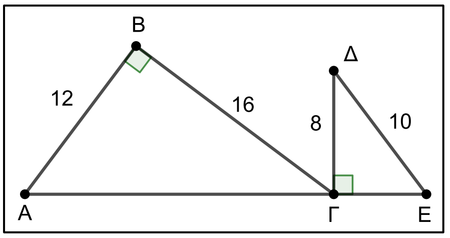


α) i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε;

ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

9. Στο παρακάτω σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΕ έχουν μήκη αντίστοιχα 12, 16, 8 και 10, οι γωνίες $\hat{ΑΒΓ}$ και $\hat{ΔΓΕ}$ είναι ορθές και τα σημεία Α , Γ και Ε ανήκουν στην ίδια ευθεία.



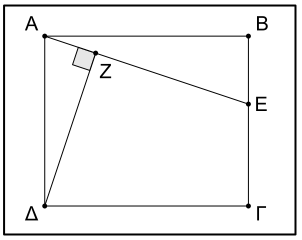
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΑΕ .

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΓΔ είναι όμοια.

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών ΑΒ και ΕΔ είναι το Ζ και ΖΗ είναι το ύψος του τριγώνου ΖΑΕ από την κορυφή του Ζ. Να αποδείξετε ότι:

i. $ΕΗ = 13$, **ii.** $ΖΗ = \frac{52}{3}$.

10. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $ΑΒ = 6$ και το Ε σημείο της πλευράς ΒΓ, ώστε $ΒΕ = 2$. Έστω ΔΖ το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο Δ προς την ΑΕ .

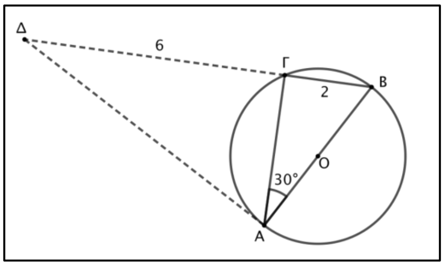


α) Να αποδείξετε ότι $ΑΕ = 2\sqrt{10}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΔΖΑ είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους.

γ) Αν $ΔΖ = ΖΕ$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΔ.

11. Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας R θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και σημείο Γ του κύκλου τέτοιο ώστε $Β\hat{Α}Γ = 30^\circ$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $ΒΓ = 2$, τότε:



α) Να υπολογίσετε:

i. την ακτίνα R , **ii.** το μήκος της πλευράς ΑΓ .

β) Θεωρούμε σημείο Δ στην προέκταση της ΒΓ τέτοιο ώστε $ΓΔ = 6$. Να εξετάσετε αν το τμήμα ΔΑ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.