

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2016
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 20ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(-1) = -\frac{1}{e^2}$
- $xf'(x) = f(x) + x^2(2e^{2x} - 1)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{2x} - x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

δ) Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται στο επίπεδο χωρίο Ω και για τις συντεταγμένες του ισχύουν οι σχέσεις:

$$0 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad -x^2 - 3x \leq y \leq f(x)$$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει το σημείο M .

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$xf'(x) - f(x) = x^2(2e^{2x} - 1) \quad (1)$$

Για $x \neq 0$ η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2e^{2x} - 1 &\Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x} \right)' = (e^{2x} - x)' \Rightarrow \\ \frac{f(x)}{x} &= \begin{cases} e^{2x} - x + c_1, & x < 0 \\ e^{2x} - x + c_2, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} xe^{2x} - x^2 + c_1x, & x < 0 \\ xe^{2x} - x^2 + c_2x, & x > 0 \end{cases} \quad (2) \end{aligned}$$

Για $x=0$ από τη σχέση (1) έχουμε $f(0) = 0$, οπότε είναι:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{2x} - x^2 + c_1x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ xe^{2x} - x^2 + c_2x, & x > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$, οπότε ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \quad (3)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^{2x}-x^2+c_1x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{2x}-x+c_1) = 1+c_1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^{2x}-x^2+c_2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{2x}-x+c_2) = 1+c_2 \end{aligned}$$

Από τη σχέση (3) έχουμε:

$$1+c_1=1+c_2 \Leftrightarrow c_1=c_2$$

Για $x=-1$ από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(-1) = -1e^{-2} - (-1)^2 + c_1(-1) \Leftrightarrow -\frac{1}{e^2} = -\frac{1}{e^2} - 1 - c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1, \text{ άρα και } c_2 = -1$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} xe^{2x} - x^2 - x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ xe^{2x} - x^2 - x, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = xe^{2x} - x^2 - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = (xe^{2x} - x^2 - x)' = e^{2x} + 2xe^{2x} - 2x - 1 = e^{2x} - 1 + 2x(e^{2x} - 1) = (e^{2x} - 1)(2x + 1)$$

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (e^{2x} - 1)(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} - 1 = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{2x} = 1 \\ 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$	
$e^{2x}-1$	-	-	0	+	
$2x+1$	-	0	+	+	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f (x)					
	T.M.		T.E.		

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

στο σημείο $x_1 = -\frac{1}{2}$ με τιμή $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e}$ και τοπικό ελάχιστο στο σημείο $x_2 = 0$

με τιμή $f(0) = 0$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[(e^{2x} - 1)(2x + 1) \right]' = (e^{2x} - 1)'(2x + 1) + (e^{2x} - 1)(2x + 1)' = \\ &= 2e^{2x}(2x + 1) + 2(e^{2x} - 1) = 2(2xe^{2x} + e^{2x} + e^{2x} - 1) = \\ &= 2e^{2x}(2x + 2 - e^{-2x}) = 2e^{2x}g(x) \end{aligned}$$

όπου $g(x) = 2x + 2 - e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$

Είναι φανερό ότι το πρόσημο της $f''(x)$ εξαρτάται από το πρόσημο της $g(x)$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x) = 2 + 2e^{-2x} > 0$$

Οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Θα αποδείξουμε ότι η $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα ρ .

Για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[-1, 0]$ ισχύουν:

♦ Είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

♦ $g(-1)g(0) = -e^2 \cdot 1 = -e^2 < 0$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-1, 0]$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια ρίζα $\rho \in (-1, 0)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι, έχουμε:

- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = g(\rho) \xrightarrow{g^{-1}} x = \rho$
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(\rho) \xrightarrow{g^{-1}} x > \rho$ και
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < g(\rho) \xrightarrow{g^{-1}} x < \rho$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	ρ	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cup$

Σ.Κ.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ένα μόνο σημείο καμπής το $A(\rho, f(\rho))$.

δ) Το χωρίο Ω είναι εκείνο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = xe^{2x} - x^2 - x$, $h(x) = -x^2 - 3x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$

Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι:

$$f(x) - h(x) = (xe^{2x} - x^2 - x) - (-x^2 - 3x) = xe^{2x} + 2x \geq 0,$$

οπότε:

$$E(\Omega) = \int_0^1 (f(x) - h(x)) dx = \int_0^1 (xe^{2x} + 2x) dx = \int_0^1 xe^{2x} dx + \int_0^1 2x dx \quad (6)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \int_0^1 x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 x (e^{2x})' dx = \frac{1}{2} \left([x e^{2x}]_0^1 - \int_0^1 e^{2x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^2 - \frac{1}{2} [e^{2x}]_0^1 \right) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - 1) = \frac{e^2 + 1}{4} \\ \bullet \int_0^1 2x dx &= [x^2]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

Από τη σχέση (6) έχουμε:

$$E(\Omega) = \frac{e^2 + 1}{4} + 1 = \frac{e^2 + 5}{4}$$

ΘΕΜΑ 21ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + e}{x} &= 1 \\ \bullet f(x+y) &= e^{2xy} \left(e^{y^2} f(x) + e^{x^2} f(y) + e^{x^2+1} + e^{y^2+1} \right) - e, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1) \end{aligned}$$

Να αποδείξετε ότι

α) $f'(0) = 1$

β) $f'(x) = 2xf(x) + e^{x^2} + 2ex, x \in \mathbb{R}$

γ) $f(x) = xe^{x^2} - e, x \in \mathbb{R}$

δ) Η συνάρτηση f αντιστρέφεται και θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} την ευθεία $x = -2e$ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = y = 0$ έχουμε:

$$f(0) = e^0 \cdot (e^0 f(0) + e^0 f(0) + e^1 + e^1) - e \Leftrightarrow f(0) = 2f(0) + e \Leftrightarrow f(0) = -e \quad (2)$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + e}{x} = 1 \stackrel{(2)}{\Rightarrow} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \quad (3)$$

β) Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x+y) = e^{2xy} \left(e^{y^2} f(x) + e^{x^2} f(y) + e^{x^2+1} + e^{y^2+1} \right) - e$$

Θεωρώντας το x ως μεταβλητή παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$(f(x+y))' = \left[e^{2xy} \left(e^{y^2} f(x) + e^{x^2} f(y) + e^{x^2+1} + e^{y^2+1} \right) - e \right]' \Rightarrow$$

$$f'(x+y) \cdot (x+y)' = 2ye^{2xy} \left(e^{y^2} f(x) + e^{x^2} f(y) + e^{x^2+1} + e^{y^2+1} \right) + e^{2xy} \left(e^{y^2} f'(x) + 2xe^{x^2} f(y) + 2xe^{x^2+1} \right)$$

Για $x=0$ από την προηγούμενη σχέση έχουμε:

$$f'(y) \cdot 1 = 2y \cdot 1 \cdot \left(e^{y^2} f(0) + 1 \cdot f(y) + e^1 + e^{y^2+1} \right) + 1 \cdot \left(e^{y^2} f'(0) + 0 + 0 \right) \stackrel{(2),(3)}{\Rightarrow}$$

$$f'(y) = -2ye^{y^2+1} + 2yf(y) + 2ye + 2ye^{y^2+1} + e^{y^2} \Rightarrow f'(y) = 2yf(y) + e^{y^2} + 2ye, \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}$$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 2xf(x) + e^{x^2} + 2ex$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xf(x) + e^{x^2} + 2ex \Leftrightarrow f'(x) - 2xf(x) = e^{x^2} + 2ex \Leftrightarrow \\ f'(x)e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}f(x) &= 1 + 2xe^{-x^2} \Leftrightarrow f'(x)e^{-x^2} + (e^{-x^2})'f(x) = 1 - e \cdot e^{-x^2}(-2x) \Leftrightarrow \\ \left(f(x)e^{-x^2} \right)' &= \left(x - e \cdot e^{-x^2} \right)' \Leftrightarrow f(x)e^{-x^2} = x - e \cdot e^{-x^2} + c \Leftrightarrow f(x) = xe^{x^2} - e + ce^{x^2} \quad (6) \end{aligned}$$

Για $x=0$ από τη σχέση (6) έχουμε:

$$f(0) = 0 - e + c \cdot 1 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} -e = -e + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως από τη σχέση (6) έχουμε:

$$f(x) = xe^{x^2} - e, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = (xe^{x^2} - e)' = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2} = (1 + 2x^2)e^{x^2} > 0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

$$\text{Το ζητούμενο εμβαδόν είναι } E(\Omega) = \int_{-2e}^0 |f^{-1}(x)| dx \quad (7)$$

Θέτουμε $u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(u) = x$, οπότε $dx = f'(u)du$. Επίσης είναι:

- $x = -2e \Leftrightarrow f(u) = -2e \Leftrightarrow f(u) = f(-1) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = -1$, (αφού $f(-1) = -2e$)
- $x = 0 \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} u = 1$, (αφού $f(1) = 0$)

Άρα έχουμε:

$$E(\Omega) = \int_{-1}^1 |u| f'(u) du = \int_{-1}^0 -u f'(u) du + \int_0^1 u f'(u) du = -I_1 + I_2 \quad (7), \text{ όπου}$$

$$I_1 = \int_{-1}^0 u f'(u) du \quad \text{και} \quad I_2 = \int_0^1 u f'(u) du$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \quad I_1 &= \int_{-1}^0 u f'(u) du = [uf(u)]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 f(u) du = f(-1) - \int_{-1}^0 (ue^{u^2} - e) du = \\ &= -2e - \int_{-1}^0 ue^{u^2} du + \int_{-1}^0 edu = -2e - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 2ue^{u^2} du + e[0 - (-1)] = \\ &= -2e - \frac{1}{2} [e^{u^2}]_{-1}^0 + e = -e - \frac{1}{2}(1 - e) = -e - \frac{1}{2} + \frac{e}{2} = -\frac{e}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad I_2 &= \int_0^1 u f'(u) du = [u f(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u) du = f(1) - \int_0^1 (ue^{u^2} - e) du = \\
 &= 0 - \int_0^1 ue^{u^2} du + \int_0^1 e du = -\frac{1}{2} \int_0^1 2ue^{u^2} du + e \cdot (1-0) = \\
 &= -\frac{1}{2} [e^{u^2}]_0^1 + e = -\frac{1}{2}(e-1) + e = -\frac{e}{2} + \frac{1}{2} + e = \frac{e}{2} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Από τη σχέση (7) έχουμε:

$$E(\Omega) = -I_1 + I_2 = -\left(-\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{e}{2} + \frac{1}{2}\right) = e + 1$$

ΘΕΜΑ 22ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1) = -1$
- $2f'(x)(f(x) - 2x) = 1 + 4f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι

α) $f(x) = 2x - \sqrt{4x^2 + x + 4}$, $x \in \mathbb{R}$

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$h(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{x} \eta\mu(\pi x), \quad x \in \mathbb{R}^*, \text{ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο } M(x_0, y_0) \text{ με } x_0 \in (1, +\infty)$$

γ) $3f(x+1) > f(x+3) + 2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Αν $a > \frac{7}{4}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$(x+3)f(x-a+1) = f(x-a+3) + 2f(x-a)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, a)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$2f'(x)(f(x) - 2x) = 1 + 4f(x) \Rightarrow 2f'(x)f(x) - 4xf'(x) = 1 + 4f(x) \Rightarrow$$

$$2f(x)f'(x) - 4(xf'(x) + f(x)) = 1 \Rightarrow (f^2(x))' - 4(xf(x))' = (x)' \Rightarrow$$

$$(f^2(x) - 4xf(x))' = (x)' \Rightarrow f^2(x) - 4xf(x) = x + c \quad (1)$$

Για $x=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^2(1) - 4 \cdot 1 \cdot f(1) = 1 + c \stackrel{f(1)=-1}{\Leftrightarrow} 1 + 4 = 1 + c \Leftrightarrow c = 4$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^2(x) - 4xf(x) = x + 4 \Leftrightarrow f^2(x) - 4xf(x) + 4x^2 = 4x^2 + x + 4 \Leftrightarrow$$

$$(f(x) - 2x)^2 = 4x^2 + x + 4 \Leftrightarrow g^2(x) = 4x^2 + x + 4 \quad (2),$$

όπου

$$g(x) = f(x) - 2x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Το τριώνυμο $4x^2 + x + 4$ έχει διακρίνουσα $\Delta = -63 < 0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $4x^2 + x + 4 > 0$

και από τη σχέση (2) προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g^2(x) > 0$, άρα $g(x) \neq 0$

Η συνάρτηση λοιπόν g δεν μηδενίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων f και $2x$, (η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως παραγωγίσιμη).

Άρα η συνάρτηση g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ με $g(1)=f(1)-2=-1-2=-3<0$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x)<0$, επομένως από τη σχέση (2) προκύπτει ότι:

$$g(x)=-\sqrt{4x^2+x+4} \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} f(x)-2x=-\sqrt{4x^2+x+4}$$

Άρα

$$f(x)=2x-\sqrt{4x^2+x+4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Για να βρούμε τα κοινά σημεία των C_f και C_h λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=h(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=h(x) \\ y=f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)-h(x)=0 \\ y=f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x)=0 \\ y=f(x) \end{cases} \quad (\Sigma)$$

$$\text{όπου } \varphi(x)=f(x)-h(x)=2x-\sqrt{4x^2+x+4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{x}\eta\mu(\pi x), \quad x \in [1, +\infty)$$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ με

- $\varphi(1)=2-3+\frac{1}{3}-0=-\frac{2}{3}<0$ και
- $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=4-\sqrt{\frac{29}{2}}=\sqrt{\frac{32}{2}}-\sqrt{\frac{29}{2}}>0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \subseteq (1, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $\varphi(x_0)=0$. Επομένως το σύστημα (Σ) έχει μία τουλάχιστον λύση (x_0, y_0) , δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (1, +\infty)$

Παρατήρηση

Αντί της τιμής $f\left(\frac{3}{2}\right)$ θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \frac{1}{12} > 0$ και να προσαρμόσουμε κατάλληλα τη συνέχεια της λύσης.

γ) Έστω τυχαίο $x \in \mathbb{R}$, τότε είναι $x < x+1 < x+3$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $x, x+1$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $x, x+1$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(x, x+1)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=2-\frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+4}}$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x, x+1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}=f(x+1)-f(x) \quad (4)$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $x+1, x+3$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $x+1, x+3$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(x+1, x+3)$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$f'(x) = 2 - \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+4}}$$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x+1, x+3)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x+3) - f(x+1)}{(x+3) - (x+1)} = \frac{f(x+3) - f(x+1)}{2} \quad (5)$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(2 - \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x+4}} \right)' = - \frac{8 \cdot 2\sqrt{4x^2+x+4} - (8x+1)(2\sqrt{4x^2+x+4})'}{(2\sqrt{4x^2+x+4})^2} = \\ &= - \frac{16\sqrt{4x^2+x+4} - (8x+1) \frac{2 \cdot (8x+1)}{2\sqrt{4x^2+x+4}}}{4(4x^2+x+4)} = - \frac{16(4x^2+x+4) - (8x+1)^2}{4(4x^2+x+4)\sqrt{4x^2+x+4}} = \\ &= - \frac{16(4x^2+x+4) - (8x+1)^2}{4(4x^2+x+4)\sqrt{4x^2+x+4}} = - \frac{63}{4(4x^2+x+4)\sqrt{4x^2+x+4}} < 0 \end{aligned}$$

Επομένως η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

Είναι:

$$x < \xi_1 < x+1 < \xi_2 < x+3 \Rightarrow \xi_1 < \xi_2 \xrightarrow{f' \downarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow$$

$$f(x+1) - f(x) > \frac{f(x+3) - f(x+1)}{2} \Rightarrow$$

$$2f(x+1) - 2f(x) > f(x+3) - f(x+1) \Rightarrow$$

$$3f(x+1) > f(x+3) + 2f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δ) Έχουμε:

$$(x+3)f(x-\alpha+1) = f(x-\alpha+3) + 2f(x-\alpha) \Leftrightarrow w(x) = 0$$

όπου

$$w(x) = (x+3)f(x-\alpha+1) - f(x-\alpha+3) - 2f(x-\alpha), \quad x \in [0, \alpha]$$

Η συνάρτηση w είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$ ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $w(0) = 3f(-\alpha+1) - f(-\alpha+3) - 2f(-\alpha)$

Όμως από το (γ) ερώτημα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$3f(x+1) > f(x+3) + 2f(x) \xrightarrow{x=-\alpha} 3f(-\alpha+1) > f(-\alpha+3) + 2f(-\alpha) \Rightarrow \\ 3f(-\alpha+1) - f(-\alpha+3) - 2f(-\alpha) > 0 \Rightarrow w(0) > 0 \quad (6)$$

$$\bullet \quad w(\alpha) = (\alpha+3)f(1) - f(3) - 2f(0) = (\alpha+3) \cdot (-1) - (6 - \sqrt{43}) - 2 \cdot (-2) = \\ = -\alpha - 3 - 6 + \sqrt{43} + 4 = -\alpha - 5 + \sqrt{43} = -(\alpha + 5 - \sqrt{43}) < 0 \Rightarrow w(\alpha) < 0 \quad (7),$$

$$\text{διότι } \alpha > \frac{7}{4} \Leftrightarrow \alpha + 5 > \frac{27}{4}$$

$$\text{Αρκεί λοιπόν } \frac{27}{4} > \sqrt{43} \Leftrightarrow 27 > 4\sqrt{43} \Leftrightarrow 729 > 688 \text{ που ισχύει.}$$

Η συνάρτηση w ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $0, \alpha$, αφού είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και λόγω των σχέσεων (6) και (7) ισχύει $w(0) \cdot w(\alpha) < 0$

Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (0, \alpha)$ τέτοιο, ώστε $w(\rho) = 0$, δηλαδή η εξίσωση

$$(x+3)f(x-\alpha+1) = f(x-\alpha+3) + 2f(x-\alpha)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\rho \in (0, \alpha)$

ΘΕΜΑ 23ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0) = 0$
- $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(2) \leq 2$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2$ έχει το πολύ μια ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

γ) Αν $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την παραβολή $y = x^2$

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{f(x)} - 1)(f(x) - 2\ln x)$

iii) Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $M(1, 0)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί

$$\text{τη σχέση } g''(x) = \frac{8x}{e^{f(x^2)}}, \text{ να αποδείξετε ότι } \int_0^1 g(x) dx = f(1)$$

ΛΥΣΗ

α) Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $0, 2$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $0, 2$
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \xrightarrow{f(0)=0} f'(\xi) = \frac{f(2)}{2}$$

Επειδή $|f'(x)| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$|f'(\xi)| \leq 1 \Rightarrow \frac{|f(2)|}{2} \leq 1 \Rightarrow |f(2)| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq f(2) \leq 2$$

β) Έστω ότι η εξίσωση $f(x) = x^2$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες x_1, x_2 στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ με $x_1 < x_2$

τότε έχουμε: $f(x_1) = x_1^2$ (1) και $f(x_2) = x_2^2$ (2)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x^2$, $x \in [x_1, x_2]$

Για τη συνάρτηση h στο διάστημα x_1, x_2 ισχύουν:

♦ Είναι συνεχής στο x_1, x_2

♦ Είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $h'(x) = f'(x) - 2x$

♦ $h(x_1) = h(x_2)$, αφού $h(x_1) = f(x_1) - x_1^2 \stackrel{(1)}{=} 0$ και $h(x_2) = f(x_2) - x_2^2 \stackrel{(2)}{=} 0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, άρα θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 \Rightarrow f'(x_0) > 1, \text{ αφού } x_0 > x_1 > \frac{1}{2}$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $|f'(x)| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq f'(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Επομένως, η εξίσωση $f(x) = x^2$ έχει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ το πολύ μια ρίζα.

γ) i) Οι τετμημένες των κοινών σημείων προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης $f(x) = x^2$
Είναι:

$$f(x) = x^2 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) = x^2 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 1) - x^2 = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln(x^2 + 1) - x^2$, $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$\varphi'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} - 2x = \frac{2x}{x^2 + 1} (1 - (x^2 + 1)) = -\frac{2x^3}{x^2 + 1}$$

Είναι:

- $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x^3 > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης φ είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	0	-
$\varphi(x)$		0	

Μέγιστο

- Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $\varphi'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$, οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$

Επομένως για κάθε $x < 0$ είναι $\varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) < 0 \Rightarrow f(x) < x^2$

- Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$
Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $\varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) < 0 \Rightarrow f(x) < x^2$
- Η συνάρτηση φ παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 0$ με μέγιστη τιμή $\varphi(0) = 0$
Επομένως η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2$ έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό 0. Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της f με την παραβολή $y = x^2$ είναι το $O(0, 0)$

ii) Για $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} (e^{f(x)} - 1)(f(x) - 2\ln x) &= (e^{\ln(x^2+1)} - 1)(\ln(x^2+1) - 2\ln x) = \\ &= (x^2+1-1)(\ln(x^2+1) - \ln x^2) = x^2 \cdot \ln \frac{x^2+1}{x^2} = x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{f(x)} - 1)(f(x) - 2\ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \right)^{+\infty \cdot 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{1+\frac{1}{x^2}=u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \frac{\ln u}{u-1} = \frac{d(\ln u)}{du} \Big|_{u=1} = 1 \end{aligned}$$

- iii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στο σημείο $M(1, 0)$, επομένως είναι $g(1) = 0$ και $g'(1) = 0$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g''(x) = \frac{8x}{e^{f(x^2)}} = \frac{8x}{e^{\ln(x^4+1)}} = \frac{8x}{x^4+1}$. Αν εφαρμόσουμε διαδοχικά τη μέθοδο

της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) dx &= \int_0^1 x'g(x) dx = [xg(x)]_0^1 - \int_0^1 xg'(x) dx = \\ &= g(1) - \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' g'(x) dx = 0 - \left(\left[\frac{x^2}{2} g'(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} g''(x) dx \right) = \\ &= -\frac{1}{2} g'(1) + \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \cdot \frac{8x}{x^4+1} \right) dx = 0 + \int_0^1 \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \\ &= \int_0^1 [\ln(x^4+1)]' dx = [\ln(x^4+1)]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 = f(1) \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 24ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^4 + 4x + 8$ και $g(x) = \sin x + x$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(\frac{2}{x}\right) = 5$

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε $4(2\alpha^4 + 2\alpha^3 + 4)(\beta^4 + 4\beta + 8) = 25\alpha^4$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 g(x)}{f(x)}$

ε) Θεωρούμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $h(1) = 8$
- $h'(3) = 6$
- $h(g(x)) \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(1, h(1))$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $h''(\xi) = 1$

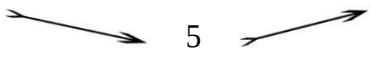
ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 4x^3 + 4 = 4(x^3 + 1)$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Ελάχιστο

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(-\infty, -1]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$
 - Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, +\infty)$
 - Η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$ με ελάχιστη τιμή $f(-1) = 5$
- β) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 5$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = -1$. Έτσι, για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f\left(\frac{2}{x}\right) = 5 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = -1 \Leftrightarrow x = -2$$

γ) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι $\alpha \neq 0$

Αν υποθέσουμε ότι $\alpha = 0$, τότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται:

$$16(\beta^4 + 4\beta + 8) = 0 \Rightarrow f(\beta) = 0$$

που είναι άτοπο διότι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f είναι ίση με 5

Άρα $\alpha \neq 0$, οπότε αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας εξίσωσης με $\alpha^4 \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{4(2\alpha^4 + 2\alpha^3 + 4)(\beta^4 + 4\beta + 8)}{\alpha^4} = 25 \Leftrightarrow \left(8 + \frac{8}{\alpha} + \frac{16}{\alpha^4}\right)(\beta^4 + 4\beta + 8) = 25 \Leftrightarrow$$

$$f\left(\frac{2}{\alpha}\right)f(\beta) = 25 \stackrel{f\left(\frac{2}{\alpha}\right) \geq 5}{\Leftrightarrow} \stackrel{f(\beta) \geq 5}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f\left(\frac{2}{\alpha}\right) = 5 \\ f(\beta) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\alpha} = -1 \\ \beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

δ) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 (\sin x + x)}{x^4 + 4x + 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sin x + x^4}{x^4 + 4x + 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sin x}{x} + 1}{1 + \frac{4}{x^3} + \frac{8}{x^4}} = 1$$

διότι

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x^4} = 0$ και

- $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \Rightarrow -\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = 0$, οπότε από το

Κριτήριο Παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

ε) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(x) = h(\sin x + x) - x^4 - 4x - 8$, $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$h(g(x)) \leq f(x) \Leftrightarrow h(\sin x + x) \leq x^4 + 4x + 8 \Leftrightarrow h(\sin x + x) - x^4 - 4x - 8 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$H(x) \leq 0 \Leftrightarrow H(x) \leq H(0), \text{ αφού } H(0) = h(1) - 8 = 8 - 8 = 0$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση H παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της.

Επίσης η συνάρτηση H είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $H'(x) = h'(\sin x + x)(-\eta \mu x + 1) - 4x^3 - 4$, οπότε είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με $H'(0) = h'(1) - 4$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε έχουμε:

$$H'(0) = 0 \Rightarrow h'(1) - 4 = 0 \Rightarrow h'(1) = 4$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(1, h(1))$ είναι:

$$y - h(1) = h'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 8 = 4(x - 1) \Rightarrow y = 4x + 4$$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = h'(x) - x$, $x \in [1, 3]$

Για τη συνάρτηση φ στο διάστημα $[1, 3]$ ισχύουν:

♦ Είναι συνεχής στο $[1, 3]$

♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ με $\varphi'(x) = h''(x) - 1$

♦ $\varphi(1) = \varphi(3)$, αφού $\varphi(1) = h'(1) - 1 = 4 - 1 = 3$ και $\varphi(3) = h'(3) - 3 = 6 - 3 = 3$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, άρα θα υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε:

$$\varphi'(\xi) = 0 \Rightarrow h''(\xi) - 1 = 0 \Rightarrow h''(\xi) = 1$$

ΘΕΜΑ 25ο :

Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

- α) Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f για $x = -1$ και $x = 1$
 β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το πρόσημό της.
 γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.
 δ) Αν $a > 1$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{a}f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) < 1 + \frac{1}{a}$
 ε) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\eta\mu x + 2)}{e^x - 1} = \frac{f(x)}{x + 2}$$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$

- στ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$ είναι $E(\Omega) = \frac{5}{4}$

ΛΥΣΗ

- α) Αν θέσουμε $x = -1$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$f^3(-1) + f(-1) = 0 \Leftrightarrow f(-1)(f^2(-1) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0, \text{ αφού } f^2(-1) + 1 \neq 0$$

Αν θέσουμε $x = 1$ στη σχέση (1) έχουμε:

$$f^3(1) + f(1) = 2 \Leftrightarrow f^3(1) + f(1) - 2 = 0 \Leftrightarrow f^3(1) - 1 + f(1) - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(f(1) - 1)(f^2(1) + f(1) + 1) + (f(1) - 1) = 0 \Leftrightarrow (f(1) - 1) \underbrace{(f^2(1) + f(1) + 2)}_{>0} = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$$

- β) Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + f'(x) = 1 \Rightarrow (3f^2(x) + 1)f'(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + 1} > 0 \quad (2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Με δεδομένο ότι $f(-1) = 0$ έχουμε:

- Για $x < -1 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) < f(-1) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για $x > -1 \xRightarrow{f \uparrow} f(x) > f(-1) \Rightarrow f(x) > 0$

- γ) Από την ισότητα (2) προκύπτει ότι η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f''(x) = \frac{-1}{(3f^2(x) + 1)^2} \cdot 6f(x)f'(x) = \frac{-6f'(x)}{(3f^2(x) + 1)^2} \cdot f(x)$$

Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι το πρόσημο της $f''(x)$ εξαρτάται από εκείνο των τιμών της $f(x)$, οπότε έχουμε:

- Αν $x < -1$ τότε $f''(x) > 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty, -1]$
- Αν $x > -1$ τότε $f''(x) < 0$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $[-1, +\infty)$

δ) Αν $\alpha > 1$ τότε είναι $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\frac{1}{\alpha}, 1\right]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε

θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left(\frac{1}{\alpha}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(1) - f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{1 - \frac{1}{\alpha}} \stackrel{f(1)=1}{=} \frac{\alpha - \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha - 1}$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[1, \alpha]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., οπότε θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (1, \alpha)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\alpha) - f(1)}{\alpha - 1} \stackrel{f(1)=1}{=} \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} < \xi_1 < 1 < \xi_2 < \alpha &\Rightarrow \xi_1 < \xi_2 \stackrel{f \cap f'}{\Rightarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{\alpha - \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha - 1} > \frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} \stackrel{\alpha-1>0}{\Rightarrow} \\ \alpha - \alpha f\left(\frac{1}{\alpha}\right) > f(\alpha) - 1 &\stackrel{\alpha>0}{\Rightarrow} \frac{1}{\alpha} f(\alpha) + f\left(\frac{1}{\alpha}\right) < 1 + \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

ε) Στο διάστημα $(-2, 0)$ η εξίσωση $\frac{f(\eta\mu x + 2)}{e^x - 1} = \frac{f(x)}{x + 2}$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$(x + 2)f(\eta\mu x + 2) - (e^x - 1)f(x) = 0 \quad (3)$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση (3) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = (x + 2)f(\eta\mu x + 2) - (e^x - 1)f(x), \quad x \in [-2, 0]$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[-2, 0]$, ως αποτέλεσμα πράξεων και συνθέσεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων και επιπλέον έχουμε:

$$\bullet \quad g(-2) = (-2 + 2)f(-\eta\mu 2 + 2) - (e^{-2} - 1)f(-2) = \underbrace{(1 - e^{-2})}_{>0} \underbrace{f(-2)}_{<0} < 0,$$

$$\text{διότι } -2 < -1 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(-2) < f(-1) \Rightarrow f(-2) < 0$$

$$\bullet \quad g(0) = 2f(\eta\mu 0 + 2) - (e^0 - 1)f(2) = 2f(2) > 0,$$

$$\text{διότι } -1 < 2 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(-1) < f(2) \Rightarrow f(2) > 0$$

$$\text{Άρα } g(-2)g(0) < 0$$

Επομένως, για τη συνάρτηση g ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-2, 0]$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 0)$

- στ)** Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και $f(-1) = 0$, για κάθε $x \geq -1$ είναι $f(x) \geq 0$. Το χωρίο του οποίου ζητείται το εμβαδόν, οριοθετείται από τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ και τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E = \int_{-1}^1 f(x) dx$.
- Από τη σχέση (2) έχουμε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η σχέση (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} f^3(x) + f(x) &= x+1 \Rightarrow f^3(x)f'(x) + f(x)f'(x) = (x+1)f'(x) \Rightarrow \\ \int_{-1}^1 f^3(x)f'(x)dx + \int_{-1}^1 f(x)f'(x)dx &= \int_{-1}^1 (x+1)f'(x)dx \Rightarrow \\ \left[\frac{1}{4}f^4(x) \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{2}f^2(x) \right]_{-1}^1 &= \left[(x+1)f(x) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f(x)dx \Rightarrow \\ \frac{1}{4} - 0 + \frac{1}{2} - 0 &= 2 - 0 - E(\Omega) \Rightarrow E(\Omega) = 2 - \frac{3}{4} \Rightarrow E(\Omega) = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 26ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{\ln x}{x+1}$ και $g(x) = 1 + x(1 - \ln x)$

- α)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β)** Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g που να είναι παράλληλες. Στη συνέχεια να βρείτε σημεία της C_g με τετμημένες αντίστροφες στα οποία οι εφαπτόμενες είναι μεταξύ τους κάθετες.
- γ)** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho > 1$ τέτοιο, ώστε η συνάρτηση f να λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της όταν $x = \rho$ και επιπλέον ισχύει $f(\rho) = \frac{1}{\rho}$.
- δ)** Θεωρούμε επίσης την εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2\rho}$. Να αποδείξετε ότι:
- Η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες α, β με $0 < \alpha < \beta$
 - Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) + f'(\xi) = \frac{1}{2\rho}$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $g'(x) = 1 - \ln x - x \frac{1}{x} = -\ln x$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow -\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > \ln 1 \Leftrightarrow x > 1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας– ακροτάτων της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			2	

Μέγιστο

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0, 1]$ και $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, 1]$
- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=1$ με μέγιστη τιμή $g(1) = 2$

Είναι:

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x(1 - \ln x)) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} (x(1 - \ln x)) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{DLH}}{=} 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 1 + 0 = 1$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x(1 - \ln x)) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$$

- ♦ Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$, οπότε είναι

$$g(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x), g(1) \right] = (1, 2]$$

- ♦ Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$, οπότε είναι

$$g(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(1) \right] = (-\infty, 2]$$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g((0, +\infty)) = g(\Delta_1) \cup g(\Delta_2) = (-\infty, 2]$$

- β) Έστω ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει παράλληλες εφαπτόμενες στα σημεία της με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$, τότε έχουμε:

$$g'(x_1) = g'(x_2) \Rightarrow -\ln x_1 = -\ln x_2 \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

που είναι άτοπο.

Επομένως, δεν υπάρχουν σημεία της C_g στα οποία οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες.

Θεωρούμε δύο σημεία της C_g με τετμημένες x_3, x_4 με $x_3 < x_4$ και $x_4 = \frac{1}{x_3}$, τότε προφανώς είναι

$0 < x_3 < 1$. Οι εφαπτόμενες στα x_3, x_4 είναι κάθετες μεταξύ τους, μόνο όταν:

$$g'(x_3) \cdot g'(x_4) = -1 \Leftrightarrow \ln x_3 \cdot \ln x_4 = -1 \Leftrightarrow \ln x_4 = -\ln x_3 \stackrel{0 < x_3 < 1}{\Leftrightarrow} (\ln x_3)^2 = 1 \Leftrightarrow \ln x_3 = -1 \Leftrightarrow x_3 = \frac{1}{e} \text{ και } x_4 = e$$

Άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $A\left(\frac{1}{e}, \frac{2}{e} + 1\right)$ και $B(e, 1)$

- γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x+1 - x \ln x}{x(x+1)^2} = \frac{g(x)}{x(x+1)^2}$$

οπότε το πρόσημο της f' είναι ίδιο με εκείνο της συνάρτησης g

Επομένως:

- Αν $x \in \Delta_1$ τότε $f'(x) > 0$ οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1
- Αν $x \in \Delta_2$ τότε δεδομένου ότι $g(\Delta_2) = (-\infty, 2]$, υπάρχει $\rho > 1$ τέτοιο, ώστε $g(\rho) = 0$ με τις τιμές της συνάρτησης g να αλλάζουν πρόσημο εκατέρωθεν του ρ

Συγκεκριμένα αν $x \in (1, \rho)$ τότε $g(x) > 0$, ενώ αν $x > \rho$ τότε $g(x) < 0$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, \rho]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\rho, +\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = \rho$. Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης f είναι ίση με

$$f(\rho) = \frac{\ln \rho}{\rho + 1} \quad (1)$$

$$\text{Όμως } g(\rho) = 0 \Rightarrow \rho(1 - \ln \rho) = -1 \Rightarrow \ln \rho - 1 = \frac{1}{\rho} \Rightarrow \ln \rho = \frac{\rho + 1}{\rho},$$

$$\text{οπότε η (1) γράφεται } f(\rho) = \frac{\frac{\rho + 1}{\rho}}{\rho + 1} = \frac{1}{\rho}$$

δ) i) Θεωρούμε τα διαστήματα $D_1 = (0, \rho]$ και $D_2 = [\rho, +\infty)$

♦ Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $D_1 = (0, \rho]$, οπότε είναι:

$$f(D_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(\rho) \right] = \left(-\infty, \frac{1}{\rho} \right],$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x + 1} \cdot \ln x \right) = -\infty \text{ και } f(\rho) = \frac{1}{\rho}$$

$$\text{Ο αριθμός } \frac{1}{2\rho} \text{ ανήκει στο διάστημα } f(D_1) = \left(-\infty, \frac{1}{\rho} \right], \text{ οπότε η εξίσωση } f(x) = \frac{1}{2\rho} \text{ έχει μία}$$

τουλάχιστον ρίζα α στο διάστημα $D_1 = (0, \rho]$ με $\alpha \neq \rho$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

♦ Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $D_2 = [\rho, +\infty)$, οπότε είναι:

$$f(D_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(\rho) \right] = \left(0, \frac{1}{\rho} \right],$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x + 1} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \text{ και } f(\rho) = \frac{1}{\rho}$$

$$\text{Ο αριθμός } \frac{1}{2\rho} \text{ ανήκει στο διάστημα } f(D_2) = \left(0, \frac{1}{\rho} \right], \text{ οπότε η εξίσωση } f(x) = \frac{1}{2\rho} \text{ έχει μία}$$

τουλάχιστον ρίζα β στο διάστημα $D_2 = [\rho, +\infty)$ με $\beta \neq \rho$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

Επομένως εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες α, β με $0 < \alpha < \beta$

ii) 1^{ος} Τρόπος:

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } \Phi(x) = f(x) + f'(x) - \frac{1}{2\rho}, \quad x \in [\alpha, \beta]$$

Για τη συνάρτηση Φ στο διάστημα α, β ισχύουν:

♦ Είναι συνεχής στο α, β , ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

$$\Phi(\alpha) = f(\alpha) + f'(\alpha) - \frac{1}{2\rho} = f'(\alpha) > 0 \text{ αφού } 0 < \alpha < \rho \text{ και } f'(x) > 0 \text{ στο διάστημα } (0, \rho)$$

$$\Phi(\beta) = f(\beta) + f'(\beta) - \frac{1}{2\rho} = f'(\beta) < 0 \text{ αφού } \rho < \beta \text{ και } f'(x) < 0 \text{ στο διάστημα } (\rho, +\infty)$$

Επομένως $\Phi(\alpha)\Phi(\beta) < 0$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\Phi(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) - \frac{1}{2\rho} = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = \frac{1}{2\rho}$$

2^{ος} Τρόπος:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = e^x \left(f(x) - \frac{1}{2\rho} \right)$, $x \in [\alpha, \beta]$

Για τη συνάρτηση h στο διάστημα α, β ισχύουν:

♦ Είναι συνεχής στο α, β

♦ Είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $h'(x) = e^x \left(f(x) - \frac{1}{2\rho} \right) + e^x f'(x)$

♦ $h(\alpha) = h(\beta)$, αφού $h(\alpha) = e^\alpha \left(f(\alpha) - \frac{1}{2\rho} \right) \stackrel{(\delta)(i)}{=} 0$ και $h(\beta) = e^\beta \left(f(\beta) - \frac{1}{2\rho} \right) \stackrel{(\delta)(i)}{=} 0$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(\xi) = 0 \Rightarrow e^\xi \left(f(\xi) - \frac{1}{2\rho} + f'(\xi) \right) = 0 \Rightarrow f(\xi) + f'(\xi) = \frac{1}{2\rho}$$

ΘΕΜΑ 27ο :

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(1) = 1$ και $f'(-1) = -1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2(xf'(x) - 4) = 1 - 2x^2f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2} + 2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

γ) Αν $E(\alpha)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την οριζόντια ασύμπτωτη της C_f και την ευθεία $x = \alpha$ με $\alpha > 1$, τότε να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3(f(x) - 2) - x + 1}{3\ln^2(x-1) - (f(x) - 2)^2}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$x^2(xf'(x) - 4) = 1 - 2x^2f(x) \Rightarrow x^3f'(x) - 4x^2 = 1 - 2x^2f(x) \Rightarrow$$

$$x^3f'(x) + 2x^2f(x) = 4x^2 + 1 \stackrel{+x \neq 0}{\Rightarrow} x^2f'(x) + 2xf(x) = 4x + \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$(x^2f(x))' = (2x^2 + \ln|x|)' \Rightarrow x^2f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \ln|x| + c_1, & x < 0 \\ 2x^2 + \ln|x| + c_2, & x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{\ln|x|}{x^2} + \frac{c_1}{x^2}, & x < 0 \\ 2 + \frac{\ln|x|}{x^2} + \frac{c_2}{x^2}, & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

- Για $x=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$1^2 \cdot (1 \cdot f'(1) - 4) = 1 - 2 \cdot 1^2 \cdot f(1) \stackrel{f'(1)=1}{\Leftrightarrow} -3 = 1 - 2f(1) \Leftrightarrow$$

$$2f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1) = 2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2 + \frac{\ln 1}{1^2} + \frac{c_2}{1^2} = 2 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

- Για $x=-1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$(-1)^2 \cdot (-1 \cdot f'(-1) - 4) = 1 - 2 \cdot (-1)^2 \cdot f(-1) \stackrel{f'(-1)=-1}{\Leftrightarrow} -(-1) - 4 = 1 - 2f(-1) \Leftrightarrow$$

$$2f(-1) = 4 \Leftrightarrow f(-1) = 2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2 + \frac{\ln|-1|}{(-1)^2} + \frac{c_1}{(-1)^2} = 2 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{\ln|x|}{x^2}, & x < 0 \\ 2 + \frac{\ln|x|}{x^2}, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln|x|}{x^2} + 2, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\ln|x|}{x^2} + 2 \right)' = \frac{(\ln|x|)' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot \ln|x|}{x^4} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln|x|}{x^4} = \\ &= \frac{x - 2x \cdot \ln|x|}{x^4} = \frac{1 - 2\ln|x|}{x^3} \end{aligned}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\ln|x| = 0 \Leftrightarrow \ln|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{e}$
- Για το πρόσημο της $f'(x)$ ελέγχουμε το πρόσημο αριθμητή και παρονομαστή:
 - $1 - 2\ln|x| > 0 \Leftrightarrow \ln|x| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x| < e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{e} \Leftrightarrow -\sqrt{e} < x < \sqrt{e}$
 - $x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας – τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$-\sqrt{e}$	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$1-2\ln x $	- 0 +			+ 0 -	
x^3	-		-	+	+
$f'(x)$	+ 0 -			+ 0 -	
$f(x)$					

T.M.

T.M.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στα σημεία $x_1 = -\sqrt{e}$ και $x_2 = \sqrt{e}$ με τιμή

$$f(\pm\sqrt{e}) = \frac{\ln|\pm\sqrt{e}|}{e} + 2 = \frac{\ln\sqrt{e}}{e} + 2 = \frac{\ln e^{\frac{1}{2}}}{e} + 2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\ln e}{e} + 2 = \frac{1}{2e} + 2$$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln|x|}{x^2} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(\ln|x|)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Οπότε έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\ln|x|}{x^2} + 2 \right) = 0 + 2 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln|x|}{x^2} + 2 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln|x| \cdot \frac{1}{x^2} + 2 \right) = -\infty$, αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln|x|) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(R^*) = \left(-\infty, \frac{1}{2e} + 2 \right]$

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$, οπότε η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και στο $-\infty$ την ευθεία $\varepsilon: y = 2$

Επίσης έχουμε:

$$f(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln|x|}{x^2} + 2 = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln|x|}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \ln|x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1,$$

οπότε η C_f τέμνει την ευθεία (ε) στα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(1, 2)$

Για το εμβαδόν $E(\alpha)$ έχουμε:

$$E(\alpha) = \int_1^\alpha |f(x) - 2| dx = \int_1^\alpha \left| \frac{\ln|x|}{x^2} \right| dx = \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx,$$

αφού για κάθε $x \geq 1$ είναι $\frac{\ln|x|}{x^2} = \frac{\ln x}{x^2} \geq 0$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} E(\alpha) &= \int_1^\alpha \frac{\ln x}{x^2} dx = \int_1^\alpha \left(-\frac{1}{x} \right)' \cdot \ln x dx = \left[-\frac{1}{x} \cdot \ln x \right]_1^\alpha - \int_1^\alpha -\frac{1}{x} \cdot (\ln x)' dx = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \cdot \ln \alpha + 0 - \int_1^\alpha -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \int_1^\alpha -\frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \left[\frac{1}{x} \right]_1^\alpha = \\ &= -\frac{\ln \alpha}{\alpha} - \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) = 1 - \frac{1 + \ln \alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

Είναι:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1+\ln \alpha}{\alpha} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{(1+\ln \alpha)'}{(\alpha)'} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\alpha}}{1} = 0 = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} = 0,$$

οπότε:

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1+\ln \alpha}{\alpha} \right) = 1 - 0 = 1$$

δ) Για κάθε x κοντά στο 1 έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{x^3(f(x)-2)-x+1}{3\eta\mu^2(x-1)-(f(x)-2)^2} &\stackrel{x>0}{=} \frac{x^3 \cdot \frac{\ln x}{x^2} - x + 1}{3\eta\mu^2(x-1) - \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)^2} = \frac{x \ln x - x + 1}{3\eta\mu^2(x-1) - \frac{\ln^2 x}{x^4}} = \\ &= \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2 \left(3 \left(\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \right)^2 - \frac{1}{x^4} \cdot \left(\frac{\ln x}{x-1} \right)^2 \right)} = \\ &= \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{3 \left(\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \right)^2 - \frac{1}{x^4} \cdot \left(\frac{\ln x}{x-1} \right)^2} \quad (1) \end{aligned}$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \stackrel{\omega=x-1}{=} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\eta\mu\omega}{\omega} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x} = 1 \quad (2)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{x-1} \right) \stackrel{(2)}{=} \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

Επομένως από (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3(f(x)-2)-x+1}{3\eta\mu^2(x-1)-(f(x)-2)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x \ln x - x + 1}{(x-1)^2} \cdot \frac{1}{3 \left(\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \right)^2 - \frac{1}{x^4} \cdot \left(\frac{\ln x}{x-1} \right)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3 \cdot 1^2 - 1 \cdot 1^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 28ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - 1 + \ln x$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} , την ευθεία με εξίσωση $y = x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x = e$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0,$$

οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $A = (0, +\infty)$, το σύνολο

τιμών της θα είναι το διάστημα $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1 + \ln x) = -\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1 + \ln x) = +\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$

Επομένως:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι και «1-1», οπότε συνεπώς αντιστρέφεται.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού $A_f = (0, +\infty)$ και σύνολο τιμών $f(A_f) = \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση

f^{-1} έχει πεδίο ορισμού $A_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ και σύνολο τιμών $f^{-1}(A_{f^{-1}}) = (0, +\infty)$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $x \leq 0$ και δεδομένου ότι $f^{-1}(x) \in (0, +\infty)$, δηλαδή $f^{-1}(x) > 0$ η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x$ αληθεύει.
- Αν $x > 0$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) \geq x &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ f(f^{-1}(x)) \geq f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \geq x - 1 + \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x > 0 \\ \ln x \leq \ln e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \leq e \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq e \end{aligned}$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty, 0] \cup (0, e] = (-\infty, e]$

γ) Επειδή $f^{-1}(x) \geq x$, για κάθε $x \in [0, e]$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E = \int_0^e (f^{-1}(x) - x) dx = \int_0^e f^{-1}(x) dx - \int_0^e x dx \quad (1)$$

Για το ολοκλήρωμα $I_1 = \int_0^e f^{-1}(x)dx$, θέτουμε:

$$f^{-1}(x) = u \text{ οπότε } x = f(u) \text{ και } dx = f'(u)du$$

Η συνάρτηση f είναι «1-1», οπότε έχουμε:

- Για $x = 0 \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(1) \Leftrightarrow u = 1$
- Για $x = e \Leftrightarrow f(u) = e \Leftrightarrow f(u) = f(e) \Leftrightarrow u = e$

Επομένως:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^e f^{-1}(x)dx = \int_1^e u f'(u)du = \int_1^e u \left(1 + \frac{1}{u}\right) du = \\ &= \int_1^e (u+1)du = \left[\frac{u^2}{2} + u \right]_1^e = \frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα $I_2 = \int_0^e x dx$

Είναι:

$$I_2 = \int_0^e x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^e = \frac{e^2}{2}$$

οπότε από την (1) παίρνουμε:

$$E = I_1 - I_2 = \frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2} - \frac{e^2}{2} = e - \frac{3}{2}$$

ΘΕΜΑ 29ο :

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2e^{-\frac{x^2}{8}}$, $x \in [0, +\infty)$ και $g(x) = \frac{x^2}{8} - \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και $f^{-1}(x) = 2\sqrt{2\ln \frac{2}{x}}$, $x \in (0, 2]$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\sqrt{2}} x^2 f'(x) dx$

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2}{4} + \ln\left(2\ln \frac{2}{x}\right) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, 2)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = -\frac{1}{2} x e^{-\frac{x^2}{8}} < 0$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$, επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$, άρα είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = y$, $x \in [0, +\infty)$ και έχουμε διαδοχικά:

$$f(x) = y \Leftrightarrow 2e^{-\frac{x^2}{8}} = y \Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{8}} = \frac{y}{2} \quad (1)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $y \leq 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη
- Αν $y > 0$ η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$-\frac{x^2}{8} = \ln \frac{y}{2} \Leftrightarrow x^2 = -8 \ln \frac{y}{2} \Leftrightarrow x^2 = 8 \ln \frac{2}{y} \quad (2)$$

$$\text{Πρέπει } \ln \frac{2}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \ln \frac{2}{y} \geq \ln 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-y}{y} \geq 0 \Leftrightarrow 0 < y \leq 2$$

Από την υπόθεση έχουμε $x \geq 0$, οπότε η σχέση (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$x = 2\sqrt{2 \ln \frac{2}{y}} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = 2\sqrt{2 \ln \frac{2}{y}}, \quad 0 < y \leq 2$$

Επομένως:

$$f^{-1}: (0, 2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = 2\sqrt{2 \ln \frac{2}{x}}$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} x^2 f'(x) dx &= \left[x^2 f(x) \right]_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} 2xf(x) dx = 2f(\sqrt{2}) - \int_0^{\sqrt{2}} 2x \cdot 2e^{-\frac{x^2}{8}} dx = \\ &= 2 \cdot 2e^{-\frac{1}{4}} - 4 \int_0^{\sqrt{2}} xe^{-\frac{x^2}{8}} dx = 4e^{-\frac{1}{4}} - 4 \cdot (-4) \int_0^{\sqrt{2}} e^{-\frac{x^2}{8}} \left(-\frac{x^2}{8}\right)' dx = \\ &= 4e^{-\frac{1}{4}} + 16 \left[e^{-\frac{x^2}{8}} \right]_0^{\sqrt{2}} = 4e^{-\frac{1}{4}} + 16 \left(e^{-\frac{1}{4}} - 1 \right) = 20e^{-\frac{1}{4}} - 16 = 4 \left(5e^{-\frac{1}{4}} - 4 \right) \end{aligned}$$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$g'(x) = \frac{x}{4} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 4}{4x}$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{4x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 2$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{4x} > 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 4 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x > 2$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας– ακροτάτων της συνάρτησης g είναι ο παρακάτω:

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		– 0 +	
$g(x)$		$\nearrow \quad \frac{1}{2} - \ln 2 \quad \searrow$	

Ελάχιστο

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0, 2]$ και $g'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 2]$
- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$
- Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x=2$ με ελάχιστη τιμή $g(2) = \frac{1}{2} - \ln 2$

δ) 1^{ος} Τρόπος:

Στο διάστημα $(0, 2)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} + \ln\left(2\ln\frac{2}{x}\right) &= 0 \Leftrightarrow \ln\left(2\ln\frac{2}{x}\right) = -\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \\ 2\ln\frac{2}{x} &= e^{-\frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow \sqrt{2\ln\frac{2}{x}} = e^{-\frac{x^2}{8}} \Leftrightarrow \\ 2\sqrt{2\ln\frac{2}{x}} &= 2e^{-\frac{x^2}{8}} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = f(x) \end{aligned}$$

οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}

Για να βρούμε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1}

επιλύουμε το σύστημα (Σ) : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}$ με $x, y \in (0, 2)$

Είναι:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = f(f^{-1}(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 2e^{-\frac{x^2}{8}} \\ x = 2e^{-\frac{y^2}{8}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^{-\frac{x^2}{8}} = y & (3) \\ e^{\frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{8}} = \frac{y}{x} & (4) \end{cases}$$

Η εξίσωση (4) ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{8} &= \ln \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{8} = \ln y - \ln x \Leftrightarrow \\ \frac{x^2}{8} - \ln x &= \frac{y^2}{8} - \ln y \Leftrightarrow g(x) = g(y) \Leftrightarrow x = y & (5) \end{aligned}$$

γιατί η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2)$ άρα είναι και «1 – 1»

Η εξίσωση (3) λόγω της (5) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$2e^{-\frac{x^2}{8}} = x \Leftrightarrow 2e^{-\frac{x^2}{8}} - x = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = 2e^{-\frac{x^2}{8}} - x$, $x \in (0, 2]$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(0, 2)$

Βρίσκουμε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης h :

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι:

$$h'(x) = -\frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{8}} - 1 < 0$$

Επίσης η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = (0, 2]$, οπότε η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = (0, 2]$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta = (0, 2]$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα:

$$h(\Delta) = \left[h(2), \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \right) = \left[\frac{2}{\sqrt{e}} - 2, 2 \right)$$

Παρατηρούμε ότι το $0 \in h(\Delta)$ και η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα Δ άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0, 2)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

2^{ος} Τρόπος:

Στο διάστημα $(0, 2)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} + \ln \left(2 \ln \frac{2}{x} \right) &= 0 \Leftrightarrow \ln \left(2 \ln \frac{2}{x} \right) = -\frac{x^2}{4} \Leftrightarrow \\ 2 \ln \frac{2}{x} &= e^{-\frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow 2 \ln 2 - 2 \ln x - e^{-\frac{x^2}{4}} = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0 \quad (6), \end{aligned}$$

όπου $\varphi(x) = 2 \ln 2 - 2 \ln x - e^{-\frac{x^2}{4}}$, $x \in (0, 2]$

Για κάθε $x \in (0, 2)$ είναι:

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x} + \frac{x}{2} e^{-\frac{x^2}{4}} = \frac{x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} - 4}{2x} \quad (7)$$

Για $x \in (0, 2)$ έχουμε:

$$-\frac{x^2}{4} < 0 \Rightarrow 0 < e^{-\frac{x^2}{4}} < 1 \quad \text{και} \quad 0 < x^2 < 4$$

Οπότε

$$0 < x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} < 4 \Rightarrow x^2 e^{-\frac{x^2}{4}} - 4 < 0 \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (7) και (8) έχουμε ότι $\varphi'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 2)$ και επειδή η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $\Delta = (0, 2]$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση φ έχει σύνολο τιμών το

$$\varphi(\Delta) = \left[\varphi(2), \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) \right), \text{ όπου } \varphi(2) = -\frac{1}{e} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty. \text{ Άρα } \varphi(\Delta) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right)$$

Παρατηρούμε ότι το $0 \in \varphi(\Delta)$ και η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα Δ , άρα η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0, 2)$, η οποία είναι και μοναδική, αφού η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

ΘΕΜΑ 30ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_a(x) = \frac{3a}{e^x + a}$, $a > 0$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f_a ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in (0, +\infty)$ η γραφική παράσταση C_a της συνάρτησης f_a έχει ένα μόνο σημείο καμπής, στο οποίο η εφαπτομένη της C_a έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης.

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E_a(\lambda)$, $\lambda > 0$, του χωρίου που περικλείεται από την C_a , την ευθεία $y=3$ και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=-\lambda$ είναι $E_a(\lambda) = 3 \ln \left(\frac{e^\lambda + a}{e^{-\lambda} + a} \right)$

δ) i) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη C_4 βρίσκεται πάνω από την καμπύλη C_1

ii) Αν $\zeta(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_1 , C_4 και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=-\lambda$, να βρείτε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \zeta(\lambda)$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'_a(x) = \frac{(3a)'(e^x + a) - 3a(e^x + a)'}{(e^x + a)^2} = \frac{-3ae^x}{(e^x + a)^2} < 0$$

άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και επειδή είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $f_a(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) \right)$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3a}{e^x + a} = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + a) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3a}{e^x + a} = \frac{3a}{0 + a} = \frac{3a}{a} = 3$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Επομένως:

$$f_a(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) \right) = (0, 3)$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f'_a(x) &= \frac{-3ae^x}{(e^x + a)^2} \\ f''_a(x) &= \frac{(-3ae^x)'(e^x + a)^2 - (-3ae^x)((e^x + a)^2)'}{(e^x + a)^4} = \\ &= \frac{-3ae^x(e^x + a)^2 + 6ae^x(e^x + a)(e^x + a)'}{(e^x + a)^4} = \\ &= \frac{-3ae^x(e^x + a) + 6ae^x \cdot e^x}{(e^x + a)^3} = \frac{-3ae^{2x} - 3a^2e^x + 6ae^{2x}}{(e^x + a)^3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{3\alpha e^{2x} - 3\alpha^2 e^x}{(e^x + \alpha)^3} = \frac{3\alpha e^x (e^x - \alpha)}{(e^x + \alpha)^3}$$

Είναι:

- $f''_{\alpha}(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3\alpha e^x (e^x - \alpha)}{(e^x + \alpha)^3} = 0 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} e^x - \alpha = 0 \Leftrightarrow e^x = \alpha \Leftrightarrow x = \ln \alpha$
- $f''_{\alpha}(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{3\alpha e^x (e^x - \alpha)}{(e^x + \alpha)^3} > 0 \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} e^x - \alpha > 0 \Leftrightarrow e^x > \alpha \Leftrightarrow x > \ln \alpha$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας – σημείων καμπής της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$\ln \alpha$	$+\infty$
$f''_{\alpha}(x)$	-	0	+
$f_{\alpha}(x)$	$\cap$		$\cup$

Σ.Κ.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f_{α} έχει ένα μόνο σημείο καμπής το $M_{\alpha}(\ln \alpha, f_{\alpha}(\ln \alpha))$

Είναι:

$$f_{\alpha}(\ln \alpha) = \frac{3\alpha}{e^{\ln \alpha} + \alpha} = \frac{3\alpha}{\alpha + \alpha} = \frac{3\alpha}{2\alpha} = \frac{3}{2},$$

οπότε το σημείο καμπής είναι το $M_{\alpha}\left(\ln \alpha, \frac{3}{2}\right)$

Είναι:

$$f'_{\alpha}(\ln \alpha) = \frac{-3\alpha e^{\ln \alpha}}{(e^{\ln \alpha} + \alpha)^2} = \frac{-3\alpha \cdot \alpha}{(\alpha + \alpha)^2} = \frac{-3\alpha^2}{4\alpha^2} = -\frac{3}{4}$$

Άρα η εφαπτομένη της C_{α} στο σημείο M_{α} έχει σταθερό συντελεστή διεύθυνσης.

γ) Από το (α) ερώτημα έχουμε $0 < f_{\alpha}(x) < 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E_{\alpha}(\lambda) &= \int_{-\lambda}^{\lambda} (3 - f_{\alpha}(x)) dx = \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(3 - \frac{3\alpha}{e^x + \alpha}\right) dx = \\ &= \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{3e^x + 3\alpha - 3\alpha}{e^x + \alpha} dx = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{3e^x}{e^x + \alpha} dx = \\ &= 3 \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{e^x}{e^x + \alpha} dx = 3 \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{e^x + \alpha} (e^x + \alpha)' dx = \\ &= 3 \cdot \left[\ln(e^x + \alpha) \right]_{-\lambda}^{\lambda} = 3 \cdot (\ln(e^{\lambda} + \alpha) - \ln(e^{-\lambda} + \alpha)) = \\ &= 3 \cdot \ln\left(\frac{e^{\lambda} + \alpha}{e^{-\lambda} + \alpha}\right) \end{aligned}$$

δ) i) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f_4(x) > f_1(x) \Leftrightarrow \frac{3 \cdot 4}{e^x + 4} > \frac{3 \cdot 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow 12(e^x + 1) > 3 \cdot (e^x + 4) \Leftrightarrow$$

$$12e^x + 12 > 3e^x + 12 \Leftrightarrow 12e^x > 3e^x \Leftrightarrow 12 > 3, \text{ που είναι αληθές.}$$

ii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_1 , C_4 και τις ευθείες $x=\lambda$ και $x=-\lambda$ είναι:

$$\begin{aligned} \zeta(\lambda) &= \int_{-\lambda}^{\lambda} (f_4(x) - f_1(x)) dx = \int_{-\lambda}^{\lambda} ((3 - f_1(x)) - (3 - f_4(x))) dx = \\ &= \int_{-\lambda}^{\lambda} (3 - f_1(x)) dx - \int_{-\lambda}^{\lambda} (3 - f_4(x)) dx \stackrel{(\gamma)}{=} E_1(\lambda) - E_4(\lambda) = \\ &= 3 \cdot \ln \left(\frac{e^\lambda + 1}{e^{-\lambda} + 1} \right) - 3 \cdot \ln \left(\frac{e^\lambda + 4}{e^{-\lambda} + 4} \right) = 3 \left(\ln \frac{e^\lambda + 1}{\frac{1}{e^\lambda} + 1} - \ln \frac{e^\lambda + 4}{\frac{1}{e^\lambda} + 4} \right) = \\ &= 3 \left(\ln e^\lambda - \ln \frac{e^\lambda(e^\lambda + 4)}{4e^\lambda + 1} \right) = 3 \ln \frac{e^\lambda}{e^\lambda(e^\lambda + 4)} = 3 \ln \frac{4e^\lambda + 1}{e^\lambda + 4} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \zeta(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(3 \ln \frac{4e^\lambda + 1}{e^\lambda + 4} \right) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(3 \ln \frac{4 + \frac{1}{e^\lambda}}{1 + \frac{4}{e^\lambda}} \right) = 3 \ln \frac{4 + 0}{1 + 0} = 3 \ln 4$$

ΘΕΜΑ 31ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f_a(x) = \ln \left(\frac{e^x + e^a}{e^x + 1} \right)$, $a \in \mathbb{R}$

α) Θέτουμε $I(a) = \int_0^1 e^{x+f_a(x)} dx$. Αν ισχύει $I(a) = e - 1$, να βρείτε το a .

β) Να αποδείξετε ότι $f_a(a - x) = a - f_a(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(a)$, με $a > 0$, του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_a της συνάρτησης f_a , τους άξονες x' , y' και την ευθεία $x = a$ δίνεται από τον

$$\text{τύπο } E(a) = \frac{a^2}{2}$$

ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$I(a) = \int_0^1 e^{x+f_a(x)} dx = \int_0^1 e^x \cdot e^{f_a(x)} dx = \int_0^1 e^x \cdot e^{\ln \left(\frac{e^x + e^a}{e^x + 1} \right)} dx = \int_0^1 e^x \cdot \frac{e^x + e^a}{e^x + 1} dx$$

Θέτουμε $u = e^x$, οπότε $du = e^x dx$

Για $x = 0$ είναι $u = 1$, ενώ για $x = 1$ είναι $u = e$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^1 \frac{e^x + e^\alpha}{e^x + 1} \cdot e^x dx = \int_1^e \frac{u + e^\alpha}{u + 1} du = \int_1^e \frac{(u+1) + (e^\alpha - 1)}{u + 1} du = \\ &= \int_1^e \frac{u+1}{u+1} du + \int_1^e \frac{(e^\alpha - 1)}{u+1} du = \int_1^e 1 du + (e^\alpha - 1) \int_1^e \frac{1}{u+1} du = \\ &= 1 \cdot (e-1) + (e^\alpha - 1) \int_1^e \frac{1}{u+1} \cdot (u+1)' du = e-1 + (e^\alpha - 1) [\ln|u+1|]_1^e = \\ &= e-1 + (e^\alpha - 1)(\ln(e+1) - \ln 2) = e-1 + (e^\alpha - 1) \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} I(\alpha) = e-1 &\Leftrightarrow e-1 + (e^\alpha - 1) \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) = e-1 \Leftrightarrow \\ (e^\alpha - 1) \ln\left(\frac{e+1}{2}\right) &= 0 \Leftrightarrow e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f_\alpha(\alpha - x) &= \ln\left(\frac{e^{\alpha-x} + e^\alpha}{e^{\alpha-x} + 1}\right) = \ln\left(\frac{e^\alpha \cdot e^{-x} + e^\alpha}{e^\alpha \cdot e^{-x} + 1}\right) = \\ &= \ln\left(\frac{e^\alpha \left(\frac{1}{e^x} + 1\right)}{e^\alpha \cdot \frac{1}{e^x} + 1}\right) = \ln\left(e^\alpha \cdot \frac{e^x + 1}{e^x + e^\alpha}\right) = \\ &= \ln e^\alpha + \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x + e^\alpha}\right) = \alpha - \ln\left(\frac{e^x + e^\alpha}{e^x + 1}\right) = \\ &= \alpha - f_\alpha(x) \end{aligned}$$

γ) Για $\alpha > 0$ είναι $e^\alpha > 1$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $\frac{e^x + e^\alpha}{e^x + 1} > \frac{e^x + 1}{e^x + 1} = 1$

Επομένως:

$$f_\alpha(x) = \ln\left(\frac{e^x + e^\alpha}{e^x + 1}\right) > \ln 1 = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E(\alpha) = \int_0^\alpha f_\alpha(x) dx$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f_\alpha(\alpha - x) = \alpha - f_\alpha(x)$

Επειδή τα μέλη της ισότητας είναι συνεχείς συναρτήσεις έχουμε:

$$\int_0^\alpha f_\alpha(\alpha - x)dx = \int_0^\alpha \alpha dx - \int_0^\alpha f_\alpha(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^\alpha f_\alpha(\alpha - x)dx = \alpha(\alpha - 0) - \int_0^\alpha f_\alpha(x)dx \Rightarrow$$

$$\int_0^\alpha f_\alpha(\alpha - x)dx = \alpha^2 - \int_0^\alpha f_\alpha(x)dx \quad (1)$$

Για το ολοκλήρωμα $\int_0^\alpha f_\alpha(\alpha - x)dx$, θέτουμε $t = \alpha - x \Leftrightarrow x = \alpha - t$, οπότε $dx = -dt$

Για $x = 0$ είναι $u = \alpha$, ενώ για $x = \alpha$ είναι $u = 0$ και έχουμε:

$$\int_0^\alpha f_\alpha(\alpha - x)dx = \int_\alpha^0 f_\alpha(t)(-dt) = -\int_\alpha^0 f_\alpha(t)dt = \int_0^\alpha f_\alpha(t)dt$$

Επομένως η σχέση (1) γράφεται:

$$\int_0^\alpha f_\alpha(x)dx = \alpha^2 - \int_0^\alpha f_\alpha(x)dx \Rightarrow E(\alpha) = \alpha^2 - E(\alpha) \Rightarrow 2E(\alpha) = \alpha^2 \Rightarrow E(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2}$$

ΘΕΜΑ 32ο :

Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(f(x)) = f(x) - \frac{x}{4}$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lambda^2$

ii) $\lambda = \frac{1}{2}$

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) > \frac{1}{4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1) = 0$ έχει ακριβώς δύο

ρίζες $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1)$ με $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{f(4) - f(3)}{f(2)}$

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f από υπόθεση είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \begin{cases} f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(f(x_1)) - f(x_1) < f(f(x_2)) - f(x_2) \Rightarrow -\frac{x_1}{4} < -\frac{x_2}{4} \Rightarrow x_1 > x_2, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β) i) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} \right) = \lambda \cdot \lambda = \lambda^2 \quad (2),$$

$$\text{αφού} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{f(x)} \stackrel{f(x)=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = \lambda$$

ii) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \frac{x}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{\frac{x}{4}}{x} \right) = \lambda - \frac{1}{4} \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\lambda^2 = \lambda - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ) Έστω $x < 0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x, 0]$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x, 0)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x}$$

Από τη σχέση (1) για $x = 0$ έχουμε:

$$f(f(0)) = f(0) \stackrel{f \ll 1-l \gg}{\Leftrightarrow} f(0) = 0$$

Οπότε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = \frac{-f(x)}{-x} = \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Όμως} \quad f'(\xi_1) > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > \frac{1}{4} \stackrel{x < 0}{\Leftrightarrow} f(x) < \frac{x}{4}$$

$$\text{Επειδή} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4} = -\infty \quad \text{έχουμε και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in (-\infty, \alpha)$

και $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, τότε θα είναι

$f(x) \leq g(x) < 0$ σε διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$ με $\beta < \alpha$, οπότε

$$\frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{f(x)} < 0$$

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 0 = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$$

Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \quad \text{και επειδή} \quad \frac{1}{f(x)} < 0$$

συμπεραίνουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Έστω $x > 0$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, x]$, οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., άρα θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Από τη σχέση (1) για $x = 0$ έχουμε:

$$f(f(0)) = f(0) \stackrel{f \ll 1-l\rangle}{\Leftrightarrow} f(0) = 0$$

Οπότε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Όμως } f'(\xi_2) > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} > \frac{1}{4} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} f(x) > \frac{x}{4}$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty \text{ έχουμε και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 0]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

$$g(-1) = 2f(3) > 0, \text{ αφού } \overset{f \uparrow}{3 > 0 \Rightarrow f(3) > f(0)} \Leftrightarrow f(3) > 0$$

$$g(0) = -f(2) < 0, \text{ αφού } \overset{f \uparrow}{2 > 0 \Rightarrow f(2) > f(0)} \Leftrightarrow f(2) > 0 \Leftrightarrow -f(2) < 0$$

Άρα

$$g(-1)g(0) < 0$$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-1, 0]$, άρα θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\rho_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho_1) = 0$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

$$g(1) = 2f(4) > 0, \text{ αφού } \overset{f \uparrow}{4 > 0 \Rightarrow f(4) > f(0)} \Rightarrow f(4) > 0$$

$$g(0) = -f(2) < 0, \text{ αφού } \overset{f \uparrow}{2 > 0 \Rightarrow f(2) > f(0)} \Rightarrow f(2) > 0 \Rightarrow -f(2) < 0$$

Άρα

$$g(0)g(1) < 0$$

Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, +\infty)$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, τότε θα είναι

$f(x) \geq g(x) > 0$ σε διάστημα της μορφής $(\beta, +\infty)$ με $\beta > \alpha$, οπότε

$$0 < \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{g(x)}$$

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$$

Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{ και επειδή } \frac{1}{f(x)} > 0$$

συμπεραίνουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho_2 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $g(\rho_2) = 0$

Δηλαδή η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$

Όμως η εξίσωση:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Leftrightarrow f(2)(x+1)(x-1) + f(3)x(x-1) + f(4)x(x+1) = 0 \Leftrightarrow \\ f(2)(x^2-1) + f(3)(x^2-x) + f(4)(x^2+x) &= 0 \Leftrightarrow \\ (f(2)+f(3)+f(4))x^2 + (f(4)-f(3))x - f(2) &= 0 \end{aligned}$$

είναι πολυωνυμική δευτέρου βαθμού, άρα έχει το πολύ δύο πραγματικές ρίζες.

Επομένως η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες τις ρ_1, ρ_2 στο διάστημα $(-1, 1)$

Είναι:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{-\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\gamma}{\alpha}} = \frac{-\beta}{\gamma} = \frac{-(f(4)-f(3))}{-f(2)} = \frac{f(4)-f(3)}{f(2)}$$

ΘΕΜΑ 33ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0,1) \cup (1,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\ln 2}$ και $f(e) = \frac{1}{e}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$
- $f'(x) = -(\ln x + 1) \cdot f^2(x)$ για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$, $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(e, f(e))$ και την ευθεία $x=4$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = -(\ln x + 1)f^2(x) \Rightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = (x)' \ln x + x(\ln x)' \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = (x \ln x)' \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} x \ln x + c_1, & 0 < x < 1 \\ x \ln x + c_2, & x > 1 \end{cases}$$

Όμως:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{\ln 2} \Leftrightarrow \frac{1}{f\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + c_1 = -\frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow c_1 = 0 \quad \text{και}$$

$$f(e) = \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{f(e)} = e \Leftrightarrow e \ln e + c_2 = e \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Άρα:

$$\frac{1}{f(x)} = \begin{cases} x \ln x, & 0 < x < 1 \\ x \ln x, & x > 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = x \ln x, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

Επομένως:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}, \quad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

β) Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι:

$$f'(x) = -(\ln x + 1)f^2(x)$$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(\ln x + 1)f^2(x) = 0 \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -(\ln x + 1)f^2(x) > 0 \stackrel{f^2(x) > 0}{\Leftrightarrow} \ln x + 1 < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 0 < x < e^{-1} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f(x)$				

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(0, \frac{1}{e}\right]$ και γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $\left[\frac{1}{e}, 1\right)$ και $(1, +\infty)$

Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-(\ln x + 1)f^2(x)\right)' = -\frac{1}{x}f^2(x) - (\ln x + 1)2f(x)f'(x) = \\ &= -\frac{1}{x}f^2(x) + 2(\ln x + 1)^2f^3(x) = f^2(x)\left(-\frac{1}{x} + 2(\ln x + 1)^2f(x)\right) = \\ &= f^2(x)\left(-\frac{1}{x} + 2(\ln x + 1)^2 \frac{1}{x \ln x}\right) = f^2(x) \cdot \frac{2(\ln x + 1)^2 - \ln x}{x \ln x} = \\ &= f^2(x) \cdot \frac{2\ln^2 x + 3\ln x + 2}{x \ln x} \neq 0, \end{aligned}$$

αφού $f^2(x) > 0$ (από υπόθεση είναι $f(x) \neq 0$) και $2\ln^2 x + 3\ln x + 2 > 0$, διότι το αντίστοιχο τριώνυμο έχει διακρίνουσα $\Delta < 0$ και $\alpha = 2 > 0$

Είναι:

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow f^2(x) \cdot \frac{2\ln^2 x + 3\ln x + 2}{x \ln x} > 0 \Leftrightarrow x \ln x > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow f^2(x) \cdot \frac{2\ln^2 x + 3\ln x + 2}{x \ln x} < 0 \Leftrightarrow x \ln x < 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} \ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$		-	+
$f(x)$		$\cap$	$\cup$

Επομένως η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, 1)$ και κυρτή στο διάστημα $(1, +\infty)$

γ) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \stackrel{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) = -\infty$$

Άρα η ευθεία $x = 0$ (άξονας $y'y$) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x \ln x} = +\infty,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x \ln x) = 0$ και $x \ln x > 0$ για $x > 1$

Άρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f

Επίσης είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \ln x} = 0,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln x) = +\infty$

Άρα η ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο $+\infty$

δ) Για κάθε $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = -(\ln x + 1)f^2(x),$$

οπότε

$$f'(e) = -(\ln e + 1)f^2(e) = -2 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^2 = -\frac{2}{e^2}$$

και η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $(e, f(e))$ είναι:

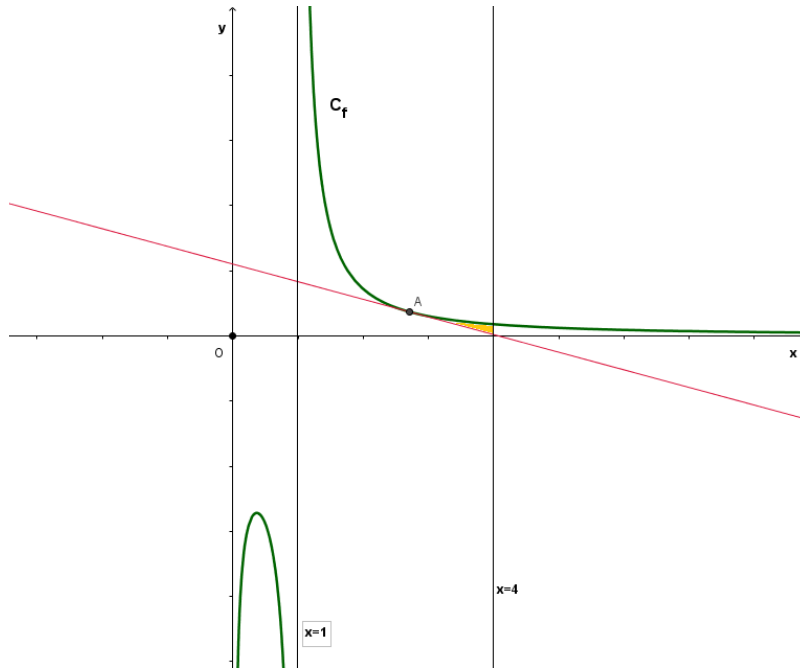
$$y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow y - \frac{1}{e} = -\frac{2}{e^2}(x - e) \Leftrightarrow y = -\frac{2}{e^2}x + \frac{3}{e}$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(1, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x) - y \geq 0 \Leftrightarrow f(x) + \frac{2}{e^2}x - \frac{3}{e} \geq 0 \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty)$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $(e, f(e))$ και την ευθεία $x = 4$ είναι:

$$\begin{aligned}
 E(\Omega) &= \int_e^4 \left(f(x) + \frac{2}{e^2}x - \frac{3}{e} \right) dx = \int_e^4 \frac{1}{x \ln x} dx + \frac{2}{e^2} \int_e^4 x dx - \frac{3}{e} \int_e^4 1 dx = \\
 &= \int_e^4 (\ln x)' \frac{1}{\ln x} dx + \frac{2}{e^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_e^4 - \frac{3}{e} [x]_e^4 = \\
 &= [\ln |\ln x|]_e^4 + \frac{16}{e^2} - 1 - \frac{12}{e} + 3 = \ln(\ln 4) + \frac{16}{e^2} - \frac{12}{e} + 2
 \end{aligned}$$



ΘΕΜΑ 34ο :

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = e$ και $f'(1) = 0$, η οποία για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ικανοποιεί τη σχέση $x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x \in (0, +\infty)$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

γ) Να αποδείξετε ότι $(a + \beta)e^{\frac{2}{a+\beta}} \leq ae^{\frac{1}{a}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}}$ για κάθε $a, \beta \in (0, +\infty)$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $g(x) = \frac{f(x)}{2x}$, $x \in (0, +\infty)$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$

ε) i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{f(x)}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x}}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι μία αρχική της h στο

διάστημα $(0, +\infty)$ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^e h(x) dx$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$x^3 f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x f''(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow x f''(x) + f'(x) - f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow$$

$$(x f'(x) - f(x))' = \left(-e^{\frac{1}{x}} \right)' \Rightarrow x f'(x) - f(x) = -e^{\frac{1}{x}} + c_1$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$1 \cdot f'(1) - f(1) = -e + c_1 \Leftrightarrow 0 - e = -e + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$x f'(x) - f(x) = -e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)' = \left(-e^{\frac{1}{x}} \right)' \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}} + c_2$$

Για $x=1$ έχουμε:

$$\frac{f(1)}{1} = e + c_2 \Leftrightarrow e = e + c_2 \Leftrightarrow c_2 = 0$$

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow f(x) = x e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (0, +\infty)$$

β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}}$$

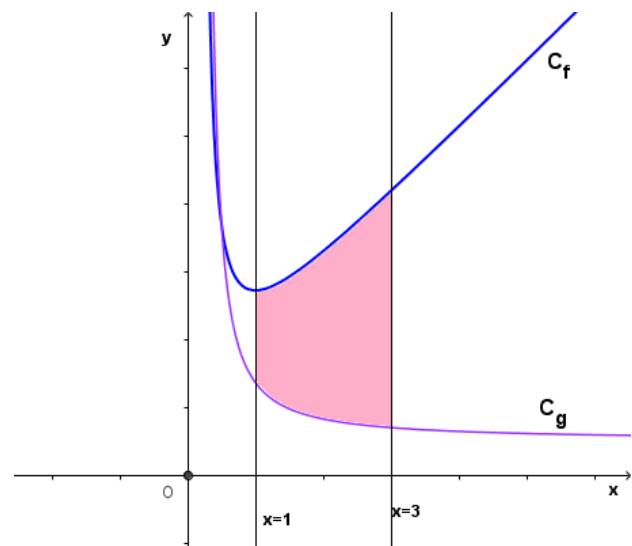
Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{x} \right) e^{\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας- ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, 1]$ και $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$



- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f''(x) = \frac{e^x}{x^3} > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

γ) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- ♦ Αν $0 < \alpha = \beta$, τότε ισχύει η ισότητα.
- ♦ Αν $0 < \alpha \neq \beta$, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\alpha < \beta$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.,

αφού είναι παραγωγίσιμη, οπότε θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.,

αφού είναι παραγωγίσιμη, οπότε θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Είναι:

$$\alpha < \xi_1 < \frac{\alpha+\beta}{2} < \xi_2 < \beta \Rightarrow \xi_1 < \xi_2 \xRightarrow[f' \uparrow]{f \cup} f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow$$

$$\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \xRightarrow{\beta-\alpha > 0}$$

$$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - f(\alpha) < f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow$$

$$2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha) + f(\beta) \Rightarrow$$

$$2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)e^{\frac{2}{\alpha+\beta}} < \alpha e^{\frac{1}{\alpha}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow$$

$$(\alpha+\beta)e^{\frac{2}{\alpha+\beta}} < \alpha e^{\frac{1}{\alpha}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}}$$

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση ισχύει:

$$(\alpha+\beta)e^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \leq \alpha e^{\frac{1}{\alpha}} + \beta e^{\frac{1}{\beta}}$$

δ) Για κάθε $x \in [1, 3]$ είναι:

$$f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(x)}{2x} = f(x) \left(1 - \frac{1}{2x}\right) = f(x) \left(\frac{2x-1}{2x}\right) > 0$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g με $g(x) = \frac{f(x)}{2x}$, $x \in (0, +\infty)$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$, είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_1^3 (f(x) - g(x)) dx = \int_1^3 \left(x e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{2} e^{\frac{1}{x}} \right) dx = \int_1^3 \left(\frac{x^2}{2} \right)' e^{\frac{1}{x}} dx - \frac{1}{2} \int_1^3 e^{\frac{1}{x}} dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2} e^{\frac{1}{x}} \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{x^2}{2} e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right) dx - \frac{1}{2} \int_1^3 e^{\frac{1}{x}} dx = \\ &= \frac{9}{2} e^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2} e + \frac{1}{2} \int_1^3 e^{\frac{1}{x}} dx - \frac{1}{2} \int_1^3 e^{\frac{1}{x}} dx = \frac{9\sqrt[3]{e} - e}{2} \end{aligned}$$

ε) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$h(x) = \frac{x+1}{f(x)} = \left(\frac{x+1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}}$$

Η h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.
Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x+1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0 = h(0),$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{u = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}} e^u = +\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι συνεχής και στο $x_0 = 0$, οπότε η συνάρτηση h είναι συνεχής.

$$\begin{aligned} \text{ii) Για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ είναι } H'(x) &= \left(x e^{-\frac{1}{x}} \right)' = (x)' e^{-\frac{1}{x}} + x \left(e^{-\frac{1}{x}} \right)' = e^{-\frac{1}{x}} + x e^{-\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x} \right)' = \\ &= e^{-\frac{1}{x}} + x e^{-\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = \left(1 + \frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x+1}{x e^{\frac{1}{x}}} = \frac{x+1}{f(x)} = h(x) \end{aligned}$$

$$\text{Επίσης } H'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{H(x) - H(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0 = h(0)$$

$$\text{Άρα μια αρχική της συνάρτησης } h \text{ στο } (0, +\infty) \text{ είναι η συνάρτηση } H(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Επομένως:

$$I = \int_0^e h(x) dx = \int_0^e H'(x) dx = [H(x)]_0^e = H(e) - H(0) = e \cdot e^{-\frac{1}{e}} - 0 = e^{1-\frac{1}{e}} = e^{\frac{e-1}{e}}$$

ΘΕΜΑ 35ο :

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + 2f(x) = 3e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

γ) Να αποδείξετε ότι :

i) $e^{\frac{x}{3}} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2} e^{\frac{x}{2}} \quad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^{\frac{x}{3}}} = \sqrt[3]{3}$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφή της.

στ) Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{\ln 4} f(x) dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2 + 2} dx = 3$

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^3(0) + 2f(0) = 3e^0 \Leftrightarrow f^3(0) + 2f(0) - 3 = 0 \quad (2)$$

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	0	2	-3	1
///	1	1	3	
1	1	3	0	

η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται

$$(f(0) - 1) \underbrace{(f^2(0) + f(0) + 3)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g(x) = x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = 3e^x$, $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x) = (x^3 + 2x)' = 3x^2 + 2 > 0 \quad \text{και} \quad h'(x) = (3e^x)' = 3e^x > 0$$

Άρα οι συναρτήσεις g, h είναι γνησίως αύξουσες στο $\mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$g(f(x)) = h(x) \Leftrightarrow (g \circ f)(x) = h(x)$$

Επειδή η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συμπεραίνουμε ότι και η συνάρτηση $g \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \xrightarrow{g \uparrow} f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

γ) i) Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι:

- $x \geq 0 \xrightarrow{f \uparrow} f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 1 > 0$
- $3f^3(x) = f^3(x) + 2f(x) \cdot f^2(x) \geq f^3(x) + 2f(x) \cdot 1 = f^3(x) + 2f(x) = 3e^x$

Οπότε:

$$3f^3(x) \geq 3e^x \Leftrightarrow f^3(x) \geq e^x \xrightarrow{f(x) > 0} f(x) \geq e^{\frac{x}{3}} \quad (3)$$

Είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, οπότε αξιοποιώντας τη γνωστή ανισότητα:

$$\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}, \text{ που ισχύει, για κάθε } \alpha, \beta \geq 0$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} f^3(x) + 2f(x) &\geq 2\sqrt{f^3(x) \cdot 2f(x)} \Leftrightarrow \\ f^3(x) + 2f(x) &\geq 2\sqrt{2f^4(x)} \Leftrightarrow \\ f^3(x) + 2f(x) &\geq 2\sqrt{2} \cdot f^2(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} \\ 3e^x &\geq 2\sqrt{2} \cdot f^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) \leq \frac{3e^x}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \\ f^2(x) &\leq \frac{3\sqrt{2}}{4} e^x \stackrel{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x) \leq \frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2} e^{\frac{x}{2}} \quad (4) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$e^{\frac{x}{3}} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2} e^{\frac{x}{2}} \quad (5)$$

ii) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f^3(x) + 2f(x) = 3e^x \Leftrightarrow f^3(x) = 3e^x - 2f(x) \stackrel{:e^x}{\Leftrightarrow} \frac{f^3(x)}{e^x} = 3 - 2\frac{f(x)}{e^x} \quad (6)$$

Αν διαιρέσουμε τα μέλη της σχέσης (5) με το e^x έχουμε:

$$\frac{e^{\frac{x}{3}}}{e^x} \leq \frac{f(x)}{e^x} \leq \frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{e^x} \Leftrightarrow e^{-\frac{2x}{3}} \leq \frac{f(x)}{e^x} \leq \frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{2x}{3}} \stackrel{t = -\frac{2x}{3}}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \right) \stackrel{u = -\frac{x}{2}}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2} \cdot e^u \right) = \frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{2} \cdot 0 = 0$

Από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{e^x} \right) = 0$

Επομένως από τη σχέση (6) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - 2\frac{f(x)}{e^x} \right) = 3 - 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{e^x} \right) = 3 - 2 \cdot 0 = 3$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{e^{\frac{x}{3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{f^3(x)}{e^x}} = \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{e^x}} = \sqrt[3]{3}$$

δ) Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι συνεχής σε τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, δηλαδή ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Από τη σχέση (1) για $x = x_0$ έχουμε:

$$f^3(x_0) + 2f(x_0) = 3e^{x_0} \quad (7)$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (7) έχουμε:

$$\begin{aligned} f^3(x) + 2f(x) - (f^3(x_0) + 2f(x_0)) &= 3e^x - 3e^{x_0} \Leftrightarrow \\ f^3(x) + 2f(x) - f^3(x_0) - 2f(x_0) &= 3(e^x - e^{x_0}) \Leftrightarrow \\ (f(x) - f(x_0)) \cdot (f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)) + 2(f(x) - f(x_0)) &= 3(e^x - e^{x_0}) \Leftrightarrow \\ (f(x) - f(x_0)) \cdot \underbrace{(f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2)}_{\neq 0} &= 3(e^x - e^{x_0}) \Leftrightarrow \\ f(x) - f(x_0) &= \frac{3(e^x - e^{x_0})}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2} \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= \left| \frac{3(e^x - e^{x_0})}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2} \right| = \\ &= \frac{3|e^x - e^{x_0}|}{\underbrace{|f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 2|}_{\geq 0}} \leq \frac{3|e^x - e^{x_0}|}{2} \end{aligned}$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}|e^x - e^{x_0}| \leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{3}{2}|e^x - e^{x_0}| \Leftrightarrow \\ f(x_0) - \frac{3}{2}|e^x - e^{x_0}| \leq f(x) \leq f(x_0) + \frac{3}{2}|e^x - e^{x_0}| \end{aligned}$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x_0) - \frac{3}{2}|e^x - e^{x_0}| \right) = f(x_0) - \frac{3}{2}|e^{x_0} - e^{x_0}| = f(x_0) - 0 = f(x_0)$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(f(x_0) + \frac{3}{2}|e^x - e^{x_0}| \right) = f(x_0) + \frac{3}{2}|e^{x_0} - e^{x_0}| = f(x_0) + 0 = f(x_0)$

Από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

ε) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και «1-1», επομένως αντιστρέφεται. Η συνάρτηση f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f και σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της f , δηλαδή το $\mathbb{R}$

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Για $x < 0$ έχουμε:

$$f^3(x) + 2f(x) = 3e^x \Leftrightarrow f(x) \cdot (f^2(x) + 2) = 3e^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{3e^x}{f^2(x) + 2}$$

Είναι:

$$|f(x)| = \left| \frac{3e^x}{f^2(x) + 2} \right| = \frac{3e^x}{f^2(x) + 2} \leq \frac{3e^x}{2}$$

Οπότε έχουμε:

$$|f(x)| \leq \frac{3}{2}e^x \Leftrightarrow -\frac{3}{2}e^x \leq f(x) \leq \frac{3}{2}e^x$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{3}{2}e^x \right) = -\frac{3}{2} \cdot 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2}e^x \right) = \frac{3}{2} \cdot 0 = 0$

Από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Για $x > 0$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{3}}} \cdot e^{\frac{x}{3}} \right) = +\infty,$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{e^{\frac{x}{3}}} \right) = \sqrt[3]{3} > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x}{3}} = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), \quad y > 0$$

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$y^3 + 2y = 3e^{f^{-1}(y)} \Leftrightarrow e^{f^{-1}(y)} = \frac{y(y^2 + 2)}{3} \stackrel{y>0}{\Leftrightarrow} f^{-1}(y) = \ln \frac{y(y^2 + 2)}{3}$$

Οπότε:

$$f^{-1} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \ln \frac{x(x^2 + 2)}{3}$$

στ) Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\ln 4} f(x) dx$ και δεδομένου ότι δεν γνωρίζουμε τον τύπο της συνεχούς στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης f κάνουμε τα εξής:

Θέτουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x = \ln \frac{y(y^2 + 2)}{3} \Leftrightarrow x = \ln(y^3 + 2y) - \ln 3$$

Είναι:

$$dx = (\ln(y^3 + 2y) - \ln 3)' dy \Rightarrow dx = \frac{3y^2 + 2}{y^3 + 2y} dy$$

Για $x = 0$ από το (α) ερώτημα έχουμε $f(0) = 1$ και για $x = \ln 4$ είναι $f(\ln 4) = 2$, αφού $f^{-1}(2) = \ln 4$

Επομένως έχουμε:

$$\int_0^{\ln 4} f(x) dx = \int_1^2 y \cdot \frac{3y^2 + 2}{y^3 + 2y} dy = \int_1^2 \frac{3y^2 + 2}{y^2 + 2} dy = \int_1^2 \frac{3(y^2 + 2) - 4}{y^2 + 2} dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^2 \left(3 - \frac{4}{y^2 + 2} \right) dy = \int_1^2 3 dy - \int_1^2 \frac{4}{y^2 + 2} dy = \\
&= 3 \cdot (2 - 1) - \int_1^2 \frac{4}{x^2 + 2} dx = 3 - \int_1^2 \frac{4}{x^2 + 2} dx
\end{aligned}$$

Δείξαμε ότι:

$$\int_0^{\ln 4} f(x) dx = 3 - \int_1^2 \frac{4}{x^2 + 2} dy \Leftrightarrow \int_0^{\ln 4} f(x) dx + \int_1^2 \frac{4}{x^2 + 2} dx = 3$$

ΘΕΜΑ 36ο :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(e) = 1$, η οποία για κάθε $x \in (1, +\infty)$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) > 0$
- $xf'(x) + f^2(x) = 0$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \varepsilon \phi x$, έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

γ) Ένα υλικό σημείο $M(a, f(a))$, $a > 1$ κινείται στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ταχύτητα $4a$ cm/sec

Αν η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο M τέμνει τον άξονα $x'x$, στο σημείο A , τότε:

- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου A , τη χρονική στιγμή t_0 , που το σημείο M διέρχεται από το σημείο $(e, f(e))$
- Αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε) με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της γωνίας θ , τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\theta'(t_0) = \frac{12e}{e^2 + 1}$ rad/sec

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ έχουμε:

$$xf'(x) + f^2(x) = 0 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{f(x)} \right)' = (\ln x)' \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \ln x + c$$

Για $x = e$ είναι:

$$\frac{1}{f(e)} = \ln e + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Επομένως:

$$\frac{1}{f(x)} = \ln x, \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty)$$

Άρα:

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad x \in (1, +\infty)$$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - \varepsilon \varphi x, \quad x \in A = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$$

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο A ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$g'(x) = f'(x) - (\varepsilon \varphi x)' = -\frac{1}{x \ln^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} < 0$$

Επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως

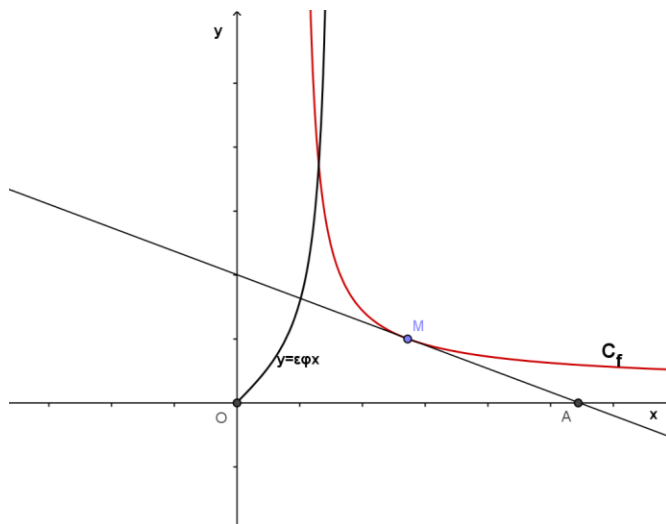
φθίνουσα στο $A = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης g είναι:

$$g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) \right) = \mathbb{R}, \text{ διότι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{1}{\ln x} - \varepsilon \varphi x \right) = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \varepsilon \varphi x \right) = +\infty$$

Επειδή το $0 \in g(A)$, η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια ρίζα στο $A = \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, η οποία είναι και μοναδική αφού η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο A .



γ) i) Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\ln x} \right)' = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x \ln^2 x}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο M είναι:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

Για $y = 0$ έχουμε:

$$-f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{\ln \alpha} = -\frac{1}{\alpha \ln^2 \alpha} (x - \alpha) \Leftrightarrow$$

$$\alpha \ln \alpha = x - \alpha \Leftrightarrow x = \alpha(1 + \ln \alpha)$$

Την τυχαία χρονική στιγμή t η τετμημένη του σημείου M είναι $\alpha(t)$

Η τετμημένη του σημείου A είναι $\beta(t) = \alpha(t)(1 + \ln \alpha(t))$ και ισχύει $\alpha'(t) = 4\alpha(t)$ (1)

Οπότε:

$$\beta'(t) = \alpha'(t)(1 + \ln \alpha(t)) + \alpha(t) \frac{1}{\alpha(t)} \alpha'(t) \Leftrightarrow$$

$$\beta'(t) = \alpha'(t) + \alpha'(t) \ln \alpha(t) + \alpha'(t) \Leftrightarrow$$

$$\beta'(t) = 2\alpha'(t) + \alpha'(t) \ln \alpha(t) \Leftrightarrow$$

$$\beta'(t) = \alpha'(t)(2 + \ln \alpha(t)) \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\beta'(t) = 4\alpha(t)(2 + \ln \alpha(t))$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\alpha(t_0) = e$ (2), οπότε:

$$\beta'(t_0) = 4\alpha(t_0)(2 + \ln \alpha(t_0)) \stackrel{(2)}{=} 4e(2 + \ln e) = 12e \text{ cm/sec}$$

ii) Είναι:

$$\varepsilon\varphi\theta(t) = f'(\alpha(t)) = -\frac{1}{\alpha(t) \ln^2 \alpha(t)}$$

Παραγωγίζουμε ως προς t και έχουμε:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \theta'(t) = \frac{\alpha'(t) \ln^2 \alpha(t) + 2\alpha'(t) \ln \alpha(t)}{\alpha^2(t) \ln^4 \alpha(t)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \theta'(t) = \frac{\alpha'(t) \ln \alpha(t) (\ln \alpha(t) + 2)}{\alpha^2(t) \ln^4 \alpha(t)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \theta'(t) = \frac{\alpha'(t) (\ln \alpha(t) + 2)}{\alpha^2(t) \ln^3 \alpha(t)} \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \theta'(t) = \frac{4\alpha(t) (\ln \alpha(t) + 2)}{\alpha^2(t) \ln^3 \alpha(t)} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)} \theta'(t) = \frac{4(\ln \alpha(t) + 2)}{\alpha(t) \ln^3 \alpha(t)}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)} \theta'(t_0) = \frac{4(\ln \alpha(t_0) + 2)}{\alpha(t_0) \ln^3 \alpha(t_0)} \stackrel{(2)}{=} \frac{4(\ln e + 2)}{e \ln^3 e} = \frac{12}{e} \quad (3)$$

Όμως:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t_0)} = 1 + \varepsilon\varphi^2\theta(t_0) = 1 + (f'(\alpha(t_0)))^2 = 1 + (f'(e))^2 = 1 + \left(-\frac{1}{e}\right)^2 = \frac{e^2 + 1}{e^2} \quad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε:

$$\frac{e^2 + 1}{e^2} \theta'(t_0) = \frac{12}{e} \Rightarrow \theta'(t_0) = \frac{12}{e} \cdot \frac{e^2}{e^2 + 1} \Rightarrow \theta'(t_0) = \frac{12e}{e^2 + 1}$$

ΘΕΜΑ 37ο :

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^3(x) + f(x) = x^4 - 2x^2 - 8 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Για τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f :

- Να αποδείξετε ότι έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της με τον άξονα $x'x$. Σε ποιο διάστημα βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$;

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη.

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τρεις θέσεις τοπικών ακροτάτων με δύο τιμές.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-2, 2)$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοιοι, ώστε $f'(x_1)f'(x_2) + f(x_1)f(x_2) = 0$

ΛΥΣΗ

α) i) Αν στη σχέση (1) θέσουμε όπου x το $-x$ έχουμε:

$$f^3(-x) + f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 - 8 \Leftrightarrow f^3(-x) + f(-x) = x^4 - 2x^2 - 8 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} f^3(x) + f(x) &= f^3(-x) + f(-x) \Leftrightarrow f^3(x) - f^3(-x) + f(x) - f(-x) = 0 \Leftrightarrow \\ (f(x) - f(-x)) &\left(f^2(x) + f(x)f(-x) + f^2(-x) \right) + f(x) - f(-x) = 0 \Leftrightarrow \\ (f(x) - f(-x)) &\left(f^2(x) + f(x)f(-x) + f^2(-x) + 1 \right) = 0 \end{aligned}$$

Είναι:

$$f^2(x) + f(x)f(-x) + f^2(-x) + 1 = \frac{1}{2} \left[f^2(x) + (f(x) + f(-x))^2 + f^2(-x) \right] + 1 \geq 1$$

Άρα έχουμε:

$$f(x) - f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι άρτια, οπότε έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$

ii) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f^3(x) + f(x) = x^4 - 2x^2 - 8 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = (x^2 - 4)(x^2 + 2) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 2)}{f^2(x) + 1}, \text{ αφού } f^2(x) + 1 > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επειδή $x^2 + 2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\bullet f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Άρα η γραφική παράστασης C_f της συνάρτησης f έχει με τον άξονα $x'x$ δύο κοινά σημεία τα $A(-2, 0)$ και $B(2, 0)$

$$\bullet \text{ Η γραφική παράστασης } C_f \text{ της συνάρτησης } f \text{ είναι κάτω από τον άξονα } x'x, \text{ όταν:}$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f^3(x) + f(x) = x^4 - 2x^2 - 8$$

Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$. Για $x = x_0$ από τη σχέση έχουμε:

$$f^3(x_0) + f(x_0) = x_0^4 - 2x_0^2 - 8 \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) , (3) με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\begin{aligned} f^3(x) - f^3(x_0) + f(x) - f(x_0) &= x^4 - x_0^4 - 2(x^2 - x_0^2) \Leftrightarrow \\ (f(x) - f(x_0))(f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1) &= (x^2 - x_0^2)(x^2 + x_0^2 - 2) \quad (4) \end{aligned}$$

Είναι:

$$f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1 = \frac{1}{2} [f^2(x) + (f(x) + f(x_0))^2 + f^2(x_0)] + 1 \geq 1$$

Επομένως από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| \cdot |x^2 + x_0^2 - 2| &= |f(x) - f(x_0)| \cdot |f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1| \geq |f(x) - f(x_0)| \Rightarrow \\ -|x^2 - x_0^2| \cdot |x^2 + x_0^2 - 2| &\leq f(x) - f(x_0) \leq |x^2 - x_0^2| \cdot |x^2 + x_0^2 - 2| \end{aligned}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (-|x^2 - x_0^2| \cdot |x^2 + x_0^2 - 2|) = \lim_{x \rightarrow x_0} (|x^2 - x_0^2| \cdot |x^2 + x_0^2 - 2|) = 0$$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, άρα η f είναι συνεχής στο x_0 για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

γ) Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$. Για κάθε x κοντά στο x_0 από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x + x_0)(x^2 + x_0^2 - 2)}{f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1} \quad (5)$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , άρα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0) + 1) = 3f^2(x_0) + 1$$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [(x + x_0)(x^2 + x_0^2 - 2)] = 2x_0(2x_0^2 - 2) = 4x_0(x_0^2 - 1)$$

Οπότε από τη σχέση (5) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{4x_0(x_0^2 - 1)}{3f^2(x_0) + 1} \in \mathbb{R}$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, με:

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - 1)}{3f^2(x) + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

δ) Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας– ακροτάτων της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
f(x)					

T.E.

T.M.

T.E.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$
 Η συνάρτηση f παρουσιάζει στις θέσεις -1 και 1 το ίδιο τοπικό ελάχιστο $f(-1) = f(1) = m$, αφού η συνάρτηση f είναι άρτια και στη θέση 0 τοπικό μέγιστο το $f(0) = M$.
 Δηλαδή η συνάρτηση f παρουσιάζει τρεις θέσεις τοπικών ακροτάτων με δύο τιμές.

ε) Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$g(x) = f(x)e^x, \quad x \in [-2, 2] \quad \text{και} \quad h(x) = f(x)e^{-x}, \quad x \in [-2, 2]$$

Για τη συνάρτηση g στο διάστημα $[-2, 2]$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $[-2, 2]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με $g'(x) = (f'(x) + f(x))e^x$
- ♦ $g(-2) = f(-2)e^{-2} = 0 \cdot e^{-2} = 0$ και $g(2) = f(2)e^2 = 0 \cdot e^2 = 0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(x_1) = 0 \Rightarrow (f'(x_1) + f(x_1))e^{x_1} = 0 \Rightarrow f'(x_1) = -f(x_1) \quad (6), \quad \text{αφού } e^{x_1} > 0$$

Για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[-2, 2]$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $[-2, 2]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ με $h'(x) = (f'(x) - f(x))e^{-x}$
- ♦ $h(-2) = f(-2)e^{-(-2)} = 0 \cdot e^2 = 0$ και $h(2) = f(2)e^{-2} = 0 \cdot e^{-2} = 0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (-2, 2)$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(x_2) = 0 \Rightarrow (f'(x_2) - f(x_2))e^{-x_2} = 0 \Rightarrow f'(x_2) = f(x_2) \quad (7), \quad \text{αφού } e^{-x_2} > 0$$

Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (6) και (7) έχουμε:

$$f'(x_1)f'(x_2) = -f(x_1)f(x_2) \Leftrightarrow f'(x_1)f'(x_2) + f(x_1)f(x_2) = 0 \quad (8)$$

Είναι $x_1 \neq x_2$, διότι αν υποθέσουμε $x_1 = x_2 = \xi$, τότε από τη σχέση (8) θα είχαμε:

$$f'(\xi)f'(\xi) + f(\xi)f(\xi) = 0 \Rightarrow [f'(\xi)]^2 + [f(\xi)]^2 = 0 \Rightarrow f'(\xi) = f(\xi) = 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, λόγω μη ύπαρξης κοινών ριζών των $f(x)$ και $f'(x)$, αφού οι ρίζες της $f(x)$ είναι οι αριθμοί -2 και 2 , ενώ οι ρίζες της $f'(x)$ είναι οι αριθμοί -1 , 0 και 1

ΘΕΜΑ 38ο :

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, για κάθε $x > 0$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να λύσετε την εξίσωση

$$(2x^2 + 1)e^{2x^2 - x - 1} = x + 2$$

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοια, ώστε $\frac{e-1}{f'(\xi_1)} + \frac{e}{f'(\xi_2)} = e - 1$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και την ευθεία $x = e$

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)+1}{e^x} dx < \frac{4}{3}$

ΛΥΣΗ

α) • Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$f'(x) = (x + \ln x)' = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, οπότε είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

• Επειδή $2x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$(2x^2 + 1)e^{2x^2 - x - 1} = x + 2 \Leftrightarrow e^{2x^2 - x - 1} = \frac{x+2}{2x^2+1} \quad (4)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

♦ Αν $x+2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ είναι $\frac{x+2}{2x^2+1} \leq 0$ και $e^{2x^2-x-1} > 0$, οπότε η εξίσωση (4) είναι αδύνατη.

♦ Αν $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$ είναι $\frac{x+2}{2x^2+1} > 0$ και $e^{2x^2-x-1} > 0$, οπότε η εξίσωση (4) ισοδύναμα γράφεται:

$$\ln(e^{2x^2-x-1}) = \ln \frac{x+2}{2x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - x - 1 = \ln(x+2) - \ln(2x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$(2x^2+1) - (x+2) = \ln(x+2) - \ln(2x^2+1) \Leftrightarrow$$

$$2x^2+1+\ln(2x^2+1) = x+2+\ln(x+2) \Leftrightarrow$$

$$f(2x^2+1) = f(x+2) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} 2x^2+1 = x+2 \Leftrightarrow$$

$$2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x = 1$$

Οι ρίζες είναι δεκτές αφού ικανοποιούν τον περιορισμό $x > -2$

β) Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ ισχύουν:

♦ Είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

♦ $f\left(\frac{1}{e}\right)f(1) = \left(\frac{1}{e} + \ln \frac{1}{e}\right) \cdot (1 + \ln 1) = \left(\frac{1}{e} - \ln e\right) \cdot (1+0) = \frac{1}{e} - 1 < 0$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\frac{1}{e}, x_0\right]$ ισχύουν:

♦ Είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, x_0\right]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{e}, x_0\right)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in \left(\frac{1}{e}, x_0\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_1) = \frac{f(x_0) - f\left(\frac{1}{e}\right)}{x_0 - \frac{1}{e}} = \frac{0 - \left(\frac{1}{e} - 1\right)}{x_0 - \frac{1}{e}} = \frac{1 - \frac{1}{e}}{x_0 - \frac{1}{e}} = \frac{e-1}{ex_0-1}$$

Είναι:

$$f'(\xi_1) = \frac{e-1}{ex_0-1} \Rightarrow \frac{e-1}{f'(\xi_1)} = ex_0 - 1 \quad (5)$$

Για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x_0, 1]$ ισχύουν:

- ♦ Είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- ♦ Είναι παραγωγίσιμη στο $(x_0, 1)$, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi_2) = \frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0} = \frac{1-0}{1-x_0} = \frac{1}{1-x_0}$$

Είναι:

$$f'(\xi_2) = \frac{1}{1-x_0} \Rightarrow \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1-x_0 \Rightarrow \frac{e}{f'(\xi_2)} = e-ex_0 \quad (6)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (5) και (6) έχουμε:

$$\frac{e-1}{f'(\xi_1)} + \frac{e}{f'(\xi_2)} = ex_0 - 1 + e - ex_0 \Rightarrow \frac{e-1}{f'(\xi_1)} + \frac{e}{f'(\xi_2)} = e-1$$

Άρα:

$$\frac{e-1}{f'(\xi_1)} + \frac{e}{f'(\xi_2)} = e-1, \text{ με } \xi_1, \xi_2 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$$

γ) Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad \text{και} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο διάστημα $(0, +\infty)$

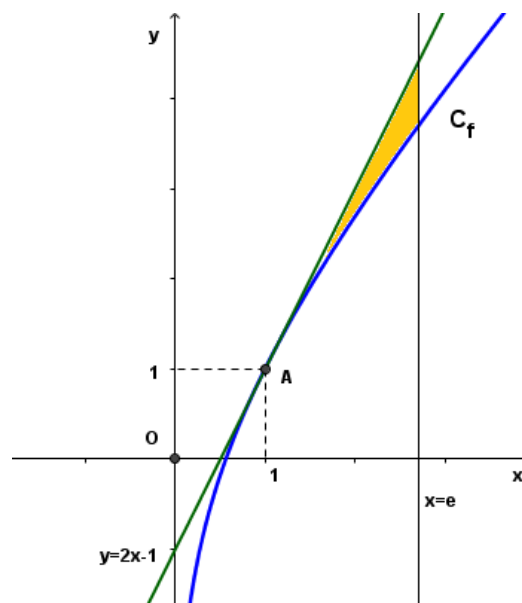
Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι:

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, +\infty)$, οπότε η C_f βρίσκεται από την ευθεία (ε) και κάτω, δηλαδή για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) \leq 2x - 1$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e (2x - 1 - f(x)) dx = \int_1^e (2x - 1 - x - \ln x) dx = \int_1^e (x - 1 - \ln x) dx = \\ &= \int_1^e (x - 1) dx - \int_1^e \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^e - \int_1^e (x)' \ln x dx = \\ &= \left(\frac{e^2}{2} - e \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) - [x \ln x]_1^e + \int_1^e x (\ln x)' dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} - (e \ln e - 1 \cdot \ln 1) + \int_1^e 1 dx = \\ &= \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} - e + 1 \cdot (e - 1) = \frac{e^2}{2} - e - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 2e - 1}{2} \end{aligned}$$



δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)+1}{e^x} = \frac{x+\ln x+1}{e^x}$, $x \in [1, e]$

Για κάθε $x \in [1, e]$ είναι:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\frac{x+\ln x+1}{e^x} \right)' = \frac{(x+\ln x+1)'e^x - (x+\ln x+1)(e^x)'}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^x - (x+\ln x+1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right) - (x+\ln x+1)}{e^x} = \\ &= \frac{\frac{1}{x} - x - \ln x}{e^x} = \frac{\varphi(x)}{e^x} \quad (7), \text{ όπου } \varphi(x) = \frac{1}{x} - x - \ln x \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in [1, e]$ είναι:

$$\varphi'(x) = \left(\frac{1}{x} - x - \ln x \right)' = -\frac{1}{x^2} - 1 - \frac{1}{x} < 0$$

Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, e]$, με $\varphi(1) = 1 - 1 - 0 = 0$, οπότε:

Αν $1 < x \leq e \xRightarrow{\varphi \downarrow} \varphi(1) > \varphi(x) \geq \varphi(e) \Rightarrow \varphi(x) < \varphi(1) \Rightarrow \varphi(x) < 0$, για κάθε $x \in (1, e]$, οπότε από τη σχέση (7) έχουμε:

$$h'(x) = \frac{\varphi(x)}{e^x} < 0, \text{ για κάθε } x \in (1, e]$$

Για τη συνάρτηση h έχουμε:

- ♦ Είναι συνεχής στο διάστημα $[1, e]$, ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων
- ♦ $h'(x) < 0$, για κάθε $x \in (1, e]$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, e]$

Επομένως:

- Για $1 \leq x \leq e \xRightarrow{h \downarrow} h(1) \geq h(x) \geq h(e) \Rightarrow h(x) \leq h(1) \Rightarrow h(x) \leq \frac{2}{e} \quad (8),$

$$\text{αφού } h(1) = \frac{1+\ln 1+1}{e^1} = \frac{2}{e}$$

Επειδή η συνάρτηση h και η σταθερή συνάρτηση $\frac{2}{e}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις από τη σχέση (8) έχουμε:

$$\int_1^e h(x) dx \leq \int_1^e \frac{2}{e} dx \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)+1}{e^x} dx \leq \frac{2}{e} \cdot (e-1) \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)+1}{e^x} dx \leq \frac{2(e-1)}{e}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{2(e-1)}{e} < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 6e - 6 < 4e \Leftrightarrow 2e < 6 \Leftrightarrow e < 3,$$

το οποίο ισχύει.

Άρα:

$$\int_1^e \frac{f(x)+1}{e^x} dx < \frac{4}{3}$$