

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
**ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2006**  
**ΕΠΙΚΑΙΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΥΛΗΣ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο (3ο – 2006)**

Έστω μια συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια, ώστε:

$$f^3(x) + 2x^2f(x) = 3\eta\mu^3x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (\text{I})$$

Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a$  τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $a=1$ .

β) Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}, \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x} \quad \text{και} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - 3x + 2}.$$

**ΛΥΣΗ**

α) Για  $x \neq 0$  διαιρούμε με  $x^3$  και τα δύο μέλη της (I) οπότε έχουμε:

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + 2\frac{f(x)}{x} = 3\left(\frac{\eta\mu x}{x}\right)^3$$

και υπολογίζοντας τα όρια των δύο μελών παίρνουμε:

$$\alpha^3 + 2\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha^3 + 2\alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

β) i) Για  $x$  κοντά στο 0 έχουμε:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}$$

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x} \stackrel{y=\eta\mu x}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

Οπότε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 1$$

ii) Για  $x$  κοντά στο 0 έχουμε:

$$\frac{f(f(x))}{x} = \frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \frac{f(x)}{x} \right) = 0 \cdot 1 = 0 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f(x))}{x} &\stackrel{y=f(x)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = 1 \end{aligned}$$

iii) Για  $x$  κοντά στο 1 έχουμε:

$$\frac{f(x^2 - x)}{x^2 - 3x + 2} = \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - x} \cdot \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - x} \cdot \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - x} \cdot \frac{x}{x-2}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - x} &\stackrel{y=x^2-x}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y)}{y} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-2} &= -1 \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2 - x)}{x^2 - 3x + 2} = 1 \cdot (-1) = -1$$

### ΘΕΜΑ 2ο (4ο – 2006)

Έστω μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , που είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$

α) Να βρείτε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x}$

β) Να αποδείξετε ότι  $f(1) = 0$

γ) Να βρείτε την τιμή του  $k$ , ώστε η συνάρτηση  $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1}, & x \neq 1 \\ k, & x = 1 \end{cases}$  να είναι

συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

δ) Για την τιμή του  $k = 1$  να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $g$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = 2x$  έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0, 1)$ .

### ΛΥΣΗ

α) Για  $x$  κοντά στο  $\frac{\pi}{2}$  έχουμε:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \cdot \sigma\upsilon\nu x = \frac{f(\eta\mu x)}{1 - \eta\mu^2 x} \cdot \sigma\upsilon\nu x = -\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x - 1} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x - 1} &\stackrel{y=\eta\mu x}{=} \lim_{y \rightarrow 1} \frac{f(y)}{y-1} = 1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \eta\mu x} &= 0 \end{aligned}$$

Οπότε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(\eta\mu x)}{\sigma\upsilon\nu x} = -1 \cdot 0 = 0$$

β) Επειδή  $f$  συνεχής στο 1 έχουμε:  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left( (x-1) \cdot \frac{f(x)}{x-1} \right) = 0 \cdot 1 = 0$ .

γ)  $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$ , άρα  $k = 1$ .

δ) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Bolzano για τη συνάρτηση  $h(x) = g(x) - 2x$  στο  $[0,1]$ .

Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , ως διαφορά συνεχών.

Είναι  $h(0) = g(0) = -f(0)$ , όμως η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ ,

οπότε  $f(0) < f(1) = 0$ . Επομένως  $h(0) > 0$ .

Επίσης είναι  $h(1) = g(1) - 2 = -1 < 0$ , οπότε  $h(0)h(1) < 0$

Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0,1)$  τέτοιο, ώστε:

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = 2x_0$$

Δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  και η ευθεία  $(\varepsilon): y = 2x$  έχουν

ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη  $x_0 \in (0,1)$ .

### ΘΕΜΑ 3ο (5ο – 2006)

Έστω μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε:

$$|f(x) - x| \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (\text{I}).$$

α) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ .

β) Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^v}, \quad v \in \mathbb{N}^*, \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right], \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \cdot f\left(\frac{x^2}{x+1}\right) \right].$$

### ΛΥΣΗ

α) Για  $x > 0$  έχουμε:  $|f(x) - x| \leq 1 \Leftrightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1 + \frac{1}{x}$  και

εφαρμόζοντας το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ .

β) i) Έχουμε: Για  $v > 1$   $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{1}{x^{v-1}} \right] = 1 \cdot 0 = 0$

$$\text{Για } v=1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^v} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \text{ και για } u = \frac{1}{x} \text{ έχουμε } \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = 1.$$

$$\text{iii) Είναι } \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \cdot f\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} \cdot f\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = (x-2) \cdot \frac{f\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{\frac{x^2}{x+1}} \quad (1)$$

και θέτοντας  $u = \frac{x^2}{x+1}$  βρίσκουμε:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f\left(\frac{x^2}{x+1}\right)}{\frac{x^2}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(u)}{u} = 1$  οπότε από την (1) παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \cdot f\left(\frac{x^2}{x+1}\right) \right] = +\infty.$$

#### ΘΕΜΑ 4ο (6ο – 2006)

Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο  $\mathbb{R}$  τέτοια ώστε:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\eta\mu x}{x-1} \text{ για κάθε } x \neq 1 \quad (I)$$

α) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x-1} = 0$ .

β) Να βρείτε το  $f(1)$

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in \left(\frac{\pi}{\pi-6}, \frac{\pi}{\pi-2}\right)$  τέτοιο ώστε:  $f(x_0) = 0$ .

#### ΛΥΣΗ

α) Για κάθε  $x > 1$  έχουμε:

$$\left| \frac{\eta\mu x}{x-1} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{x-1} \leq \frac{1}{x-1} \Rightarrow -\frac{1}{x-1} \leq \frac{\eta\mu x}{x-1} \leq \frac{1}{x-1} \text{ με κριτήριο}$$

παρεμβολής βρίσκουμε:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x-1} = 0$ .

β) Από την (I) παίρνουμε:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0$ . Θέτουμε  $y = \frac{x}{x-1}$  τότε

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) \text{ και επειδή η } f \text{ είναι συνεχής στο } 1 \text{ έχουμε:}$$

$$f(1) = \lim_{y \rightarrow 1} f(y) = 0.$$

γ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano για την  $f$  στο  $\left[\frac{\pi}{\pi-6}, \frac{\pi}{\pi-2}\right]$ .

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{6} \text{ η (I) δίνει: } f\left(\frac{\pi}{\pi-6}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{6}-1} = \frac{3}{\pi-6} < 0$$

$$\text{Για } x = \frac{\pi}{2} \text{ η (I) δίνει: } f\left(\frac{\pi}{\pi-2}\right) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}-1} = \frac{2}{\pi-2} > 0.$$

**Σημείωση:** Παρατηρείστε ότι από την σχέση (I) μπορεί να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης για κάθε  $x \neq 1$ , οπότε τα ερωτήματα β) και γ) επιλύονται διαφορετικά.

## ΘΕΜΑ 5ο (7ο – 2006)

Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$  με  $f(0)=1$  και  $f(x)>0$  για κάθε  $x \in [0, +\infty)$ . Αν  $f'(x) + f(x) = e^x$  για κάθε  $x \in [0, +\infty)$  (1), τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 0$ .

β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f'(x) = \frac{1}{2} \eta \mu x$ .

## ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (1) για  $x = 0$  έχουμε:

$$f'(0) + f(0) = e^0 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 0$$

(η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$  από υπόθεση).

β) Για κάθε  $x \in [0, +\infty)$  είναι:

$$f'(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = \left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)',$$

οπότε:

$$f(x)e^x = \frac{1}{2}e^{2x} + c, \quad x \geq 0 \quad (2).$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ από την (2) έχουμε } 1 = \frac{1}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2},$$

επομένως για κάθε  $x \geq 0$  είναι:

$$f(x)e^x = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \geq 0.$$

γ) Για κάθε  $x \in [0, +\infty)$  είναι  $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ,

οπότε η εξίσωση  $f'(x) = \frac{1}{2} \eta \mu x$  ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2} \eta \mu x \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = \eta \mu x$$

Παρατηρούμε ότι  $e^0 - e^{-0} = \eta \mu 0 \Leftrightarrow 0 = 0$  αληθές, άρα το 0 είναι ρίζα της εξίσωσης.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = e^x - e^{-x} - \eta \mu x, \quad x \geq 0$ .

$$\text{Για κάθε } x \in [0, +\infty) \text{ είναι } g'(x) = e^x + e^{-x} - \sigma \nu \eta x = \underbrace{\left(e^x + \frac{1}{e^x} - 2\right)}_{\geq 0} + \underbrace{(2 - \sigma \nu \eta x)}_{> 0} > 0.$$

Άρα η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ , οπότε η ρίζα 0 της εξίσωσης είναι μοναδική.

Επομένως:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \eta \mu x \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = \eta \mu x \Leftrightarrow x = 0.$$

**Σημείωση:** Είναι γνωστό ότι  $a + \frac{1}{a} \geq 2$  για κάθε  $a > 0$  και αφού  $e^x > 0$  είναι  $e^x + \frac{1}{e^x} - 2 \geq 0$ .

Επίσης  $2 - \sigma \nu \eta x > 0$ , αφού  $|\sigma \nu \eta x| \leq 1$  για κάθε  $x$ .

**ΘΕΜΑ 6ο (8ο – 2006)**

Έστω συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) > 2007$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  τέμνει την ευθεία με εξίσωση  $y = 2006x + 1$  σε ένα ακριβώς σημείο.

**ΛΥΣΗ**

Αρκεί να δείξω ότι η εξίσωση  $f(x) = 2006x + 1$  έχει μία ακριβώς ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - (2006x + 1)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως διαφορά παραγωγισίμων με:

$$g'(x) = f'(x) - 2006 > 2007 - 2006 = 1 > 0 \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε}$$

η  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει το πολύ μια ρίζα στο  $\mathbb{R}$ .

- Η  $g$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού σε κάθε διάστημα της μορφής  $[0, x]$  με  $x > 0$  άρα θα υπάρχει  $\xi_1 \in (0, x)$  τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi_1) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \Leftrightarrow g(x) = g'(\xi_1) \cdot x + g(0) > x + g(0) \quad (\text{αφού } g'(\xi_1) > 1 \Leftrightarrow g'(\xi_1)x > x).$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + g(0)) = +\infty$ , άρα και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ , οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής  $(\beta, +\infty)$  με  $\beta > 0$  τέτοιο, ώστε  $g(x) > 0$  για κάθε  $x \in (\beta, +\infty)$ . Επομένως  $g(\lambda) > 0$  για  $\lambda \in (\beta, +\infty)$ .

Η  $g$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ του Διαφορικού Λογισμού σε κάθε διάστημα της μορφής  $[x, 0]$  με  $x < 0$ , άρα θα υπάρχει  $\xi_2 \in (x, 0)$  τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi_2) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \Leftrightarrow g(x) = g'(\xi_2) \cdot x + g(0) < x + g(0) \quad (\text{αφού } g'(\xi_2) > 1 \Leftrightarrow g'(\xi_2)x < x).$$

Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + g(0)) = -\infty$ , άρα και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$ , οπότε θα υπάρχει διάστημα της μορφής  $(-\infty, \alpha)$  με  $\alpha < 0$  τέτοιο, ώστε  $g(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, \alpha)$ . Επομένως  $g(\kappa) < 0$  για  $\kappa \in (-\infty, \alpha)$ .

Η  $g$  ικανοποιεί λοιπόν τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο  $[\kappa, \lambda]$ . Επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\kappa, \lambda)$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = 0$ .

Δείξαμε λοιπόν ότι η  $g(x) = 0$  έχει:

- μια τουλάχιστον ρίζα και
- μια το πολύ ρίζα στο  $\mathbb{R}$

Άρα η  $g(x) = 0$  έχει μια ακριβώς ρίζα στο  $\mathbb{R}$ , που σημαίνει ότι η  $C_f$  τέμνει την ευθεία με εξίσωση  $y = 2006x + 1$  σε ένα ακριβώς σημείο.

**ΘΕΜΑ 7ο (10ο – 2006)**

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(2) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x) = 2xf(x) - x^2f(2-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι  $[f(x) - x]^2 = x^2[1 - f(2-x)]$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

β) Να αποδείξετε ότι  $f(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

γ) Αν η  $C_f$  έχει με τον άξονα  $x'x$  δύο μόνο κοινά σημεία, τότε να αποδείξετε ότι για  $x = 1$  η  $f$  παίρνει μέγιστη τιμή  $f(1) = 1$ .

## ΛΥΣΗ

α) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= 2xf(x) - x^2f(2-x) \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) = -x^2f(2-x) \Leftrightarrow \\ f^2(x) - 2xf(x) + x^2 &= x^2 - x^2f(2-x) \Leftrightarrow [f(x) - x]^2 = x^2[1 - f(2-x)] \end{aligned}$$

β) Για  $x \neq 0$  είναι:

$$1 - f(2-x) = \frac{[f(x) - x]^2}{x^2} \geq 0 \text{ οπότε } f(2-x) \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Επίσης είναι  $f(2-0) = f(2) = 0 \leq 1$ .

Άρα  $f(2-x) \leq 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Αν όπου  $x$  θέσουμε το  $2-x$  έχουμε:

$$f(2-(2-x)) \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

γ) Για  $x=1$  από την αρχική σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} f^2(1) &= 2f(1) - f(1) \Leftrightarrow f^2(1) = f(1) \Leftrightarrow \\ f(1)[f(1) - 1] &= 0 \Leftrightarrow f(1) = 0 \text{ ή } f(1) = 1 \end{aligned}$$

Για  $x=0$  επίσης έχουμε:

$$f^2(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$$

Επειδή  $f(0)=0$  και  $f(2)=0$  δεν είναι δυνατόν να είναι και  $f(1)=0$ , αφού η  $C_f$  έχει με τον άξονα  $x'x$  δύο μόνο κοινά σημεία. Υποχρεωτικά λοιπόν είναι  $f(1)=1$ .

Άρα  $f(x) \leq f(1)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Επομένως η  $f$  παίρνει μέγιστη τιμή το 1 για  $x=1$ .

## ΘΕΜΑ 8ο (12ο – 2006)

A) Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ,  $x \in [1, e]$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την  $f^{-1}$

β)  $\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e$

B) Έστω  $h$  μια αρχική της συνάρτηση  $e^{x^2}$  στο  $\mathbb{R}$  με  $h(1)=0$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $h(x) \geq e^x - e$ , για κάθε  $x \in [0, +\infty)$ .

β)  $\int_0^1 h(x) dx = \frac{1-e}{2}$

## ΛΥΣΗ

A) α) Για κάθε  $x \in (1, e)$  είναι  $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$  και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $[1, e]$

συμπεραίνουμε ότι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, e]$ , άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται. Το σύνολο τιμών της  $f$  είναι:

$$f([1, e]) = [f(1), f(e)] = [0, 1]$$

Είναι  $y = f(x)$  και με  $1 \leq x \leq e$ ,  $0 \leq y \leq 1$  έχουμε:

$$y = \sqrt{\ln x} \Leftrightarrow \ln x = y^2 \Leftrightarrow x = e^{y^2} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^{y^2}$$

Άρα  $f^{-1}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f^{-1}(x) = e^{x^2}$  με  $f^{-1}([0, 1]) = [1, e]$ .

β) Αν  $I = \int_1^e \sqrt{\ln x} dx$  και θέσουμε  $\sqrt{\ln x} = u$  τότε έχουμε  $x = e^{u^2}$ , οπότε

$$dx = (e^{u^2})' du \Leftrightarrow dx = 2ue^{u^2} du$$

Για  $x=1$  είναι  $u = \sqrt{\ln 1} = 0$  και για  $x=e$  είναι  $u = \sqrt{\ln e} = 1$ .

Έχουμε:

$$I = \int_0^1 u 2ue^{u^2} du = \int_0^1 u(e^{u^2})' du = [ue^{u^2}]_0^1 - \int_0^1 u'e^{u^2} du = e - \int_0^1 e^{u^2} du = e - \int_0^1 e^{x^2} dx, \text{ οπότε}$$

$$\int_1^e \sqrt{\ln x} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e - \int_0^1 e^{x^2} dx + \int_0^1 e^{x^2} dx = e.$$

**B) α)** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi(x) = h(x) - e^x + e$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Η συνάρτηση  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $h'(x) = e^{x^2}$

Άρα η συνάρτηση  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως άθροισμα παραγωγισίμων.

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $\varphi'(x) = e^{x^2} - e^x$ . Είναι

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - e^x = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} = e^x \Leftrightarrow x^2 = x \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1.$$

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} - e^x > 0 \Leftrightarrow e^{x^2} > e^x \Leftrightarrow x^2 > x \Leftrightarrow x(x-1) > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x > 1.$$

Ο πίνακας μεταβολών της  $\varphi$  είναι:

| x             | $-\infty$  | 0            | 1          | $+\infty$  |
|---------------|------------|--------------|------------|------------|
| $\varphi'(x)$ | +          | 0            | -          | +          |
| $\varphi(x)$  | $\nearrow$ | $\varphi(0)$ | $\searrow$ | $\nearrow$ |

$$\text{αφού } \varphi(1) = h(1) - e + e = 0$$

Στο διάστημα  $[0, +\infty)$  η  $\varphi$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 1$  με ελάχιστη τιμή

$\varphi(1) = 0$ . Άρα για κάθε  $x \in [0, +\infty)$  είναι:

$$\varphi(x) \geq \varphi(1) \Leftrightarrow h(x) - e^x + e \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq e^x - e$$

**β)** Είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^1 h(x) dx &= \int_0^1 (x)' h(x) dx = [xh(x)]_0^1 - \int_0^1 xh'(x) dx = \\ &= h(1) - \int_0^1 xe^{x^2} dx = 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x^2})' dx = -\frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = -\frac{1}{2} (e - 1) = \frac{1-e}{2} \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 9ο (14ο – 2006)

**α)** Να αποδείξετε ότι  $e^x - \eta\mu x \geq x + 1 - \eta\mu x \geq x$  για κάθε  $x \in [0, +\infty)$ .

**β)** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x}$ ,  $x \geq 0$ . Να βρείτε:

i) Την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .

ii) Τους αριθμούς  $\alpha, \beta$  ώστε  $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \alpha(e^x - \eta\mu x) + \beta(e^x - \eta\mu x)'$  για κάθε  $x \in [0, +\infty)$ .

iii) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x=0$  και  $x = \frac{\pi}{4}$ .

## ΛΥΣΗ

α) Ισχύει ότι  $1 - \eta\mu x \geq 0$  άρα και  $x + 1 - \eta\mu x \geq x$ .

Επίσης θέλουμε να δείξουμε ότι  $e^x - \eta\mu x \geq x + 1 - \eta\mu x$ .

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι  $e^x \geq x + 1$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = e^x - x - 1$ ,  $x \in [0, +\infty)$ . Είναι  $h'(x) = e^x - 1$ .

Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  και για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι  $h'(x) > 0$

Άρα η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ , οπότε για  $x \geq 0$  είναι:

$$h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1.$$

β) i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x}$

Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι:

$$|f(x)| = \left| \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x} \right| = \frac{|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|}{|e^x - \eta\mu x|} \text{ αλλά}$$

$$\frac{|\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x|}{|e^x - \eta\mu x|} \leq \frac{|\eta\mu x| + |\sigma\upsilon\nu x|}{|e^x - \eta\mu x|} \leq \frac{1+1}{|e^x - \eta\mu x|} = \frac{2}{|e^x - \eta\mu x|} = \frac{2}{e^x - \eta\mu x} \leq \frac{2}{x}$$

λόγω και του (α) υποερωτήματος.

$$\text{Οπότε } -\frac{2}{x} \leq f(x) \leq \frac{2}{x} \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( -\frac{2}{x} \right) = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0, \text{ οπότε από το Κριτήριο Παρεμβολής είναι και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ επομένως η } y = 0 \text{ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της } C_f \text{ στο } +\infty.$$

ii) Για κάθε  $x \in [0, +\infty)$  έχουμε:

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \alpha(e^x - \eta\mu x) + \beta(e^x - \eta\mu x)' \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \alpha(e^x - \eta\mu x) + \beta(e^x - \sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta)e^x - (\alpha + 1)\eta\mu x - (\beta - 1)\sigma\upsilon\nu x = 0$$

Για  $x = 0$  έχουμε:

$$(\alpha + \beta)e^0 - (\alpha + 1)\eta\mu 0 - (\beta - 1)\sigma\upsilon\nu 0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha + \beta - \beta + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1$$

Για  $x = \frac{\pi}{2}$  έχουμε:

$$(\alpha + \beta)e^{\frac{\pi}{2}} - (\alpha + 1)\eta\mu \frac{\pi}{2} - (\beta - 1)\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta)e^{\frac{\pi}{2}} = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$$

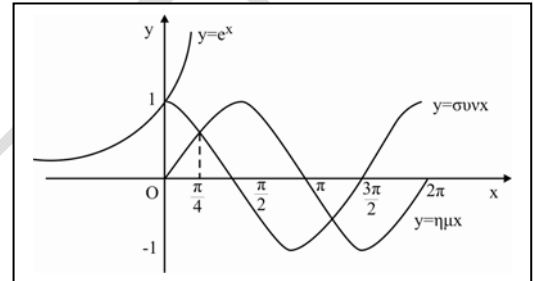
Επαληθεύουμε ότι  $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = -(e^x - \eta\mu x) + (e^x - \eta\mu x)'$ , για κάθε  $x \in [0, +\infty)$ .

$$\begin{aligned}
 \text{iii) } E &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x} \right| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} -\frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x - \eta\mu x} dx = \\
 &= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{-(e^x - \eta\mu x)}{e^x - \eta\mu x} + \frac{(e^x - \eta\mu x)'}{e^x - \eta\mu x} \right] dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ -1 + \frac{(e^x - \eta\mu x)'}{e^x - \eta\mu x} \right] dx = \\
 &= \frac{\pi}{4} - [\ln(e^x - \eta\mu x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \ln\left(e^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

**Σημείωση:** Από τη γραφική παράσταση για κάθε

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ είναι: } \bullet \eta\mu x \leq \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x \leq 0$$

$$\bullet e^x > \eta\mu x \Leftrightarrow e^x - \eta\mu x > 0$$



### ΘΕΜΑ 10ο (17ο – 2006)

Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(2005) = \frac{1}{2}$ ,  $f(2007) = 3$  και  $f(1)f(2) = f(3)f(4)$  να αποδείξετε ότι:

- α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $f(\xi) = 1$   
 β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in [1, 2]$  τέτοιο, ώστε  $f^2(x_0) = f(1)f(2)$   
 γ) Η συνάρτηση  $f$  δεν αντιστρέφεται.

#### ΛΥΣΗ

- α) • Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[2005, 2007]$   
 •  $\frac{1}{2} = f(2005) \neq f(2007) = 3$   
 • Ο αριθμός 1 είναι μεταξύ των  $f(2005)$  και  $f(2007)$ , άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (2005, 2007) \subseteq \mathbb{R}$  τέτοιο, ώστε  $f(\xi) = 1$ .

- β) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f^2(x) - f(1)f(2)$ ,  $x \in [1, 2]$ .

- Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$
- $g(1)g(2) = [f^2(1) - f(1)f(2)][f^2(2) - f(1)f(2)] = \underbrace{-f(1)f(2)}_{<0} \cdot \underbrace{[f(1) - f(2)]^2}_{\geq 0} \leq 0$ , γιατί η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στο  $\mathbb{R}$ , άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο, οπότε  $f(1)f(2) > 0 \Leftrightarrow -f(1)f(2) < 0$ . Επίσης είναι  $[f(1) - f(2)]^2 \geq 0$ .

Διακρίνουμε περιπτώσεις

- i) αν  $g(1)g(2) = 0$  τότε  $g(1) = 0$  ή  $g(2) = 0$

- ii) αν  $g(1)g(2) < 0$  τότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (1, 2)$  τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) - f(1)f(2) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) = f(1)f(2) \quad (1).$$

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in [1, 2]$  ώστε  $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_0) = f(1)f(2)$ .

γ) Επειδή  $f(1)f(2) = f(3)f(4)$  η συνάρτηση  $g$  γράφεται  $g(x) = f^2(x) - f(3)f(4)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $[3, 4]$
- $g(3)g(4) = [f^2(3) - f(1)f(2)][f^2(4) - f(1)f(2)] = \underbrace{-f(3)f(4)}_{<0} \cdot \underbrace{[f(3) - f(4)]^2}_{\geq 0} \leq 0$ .

Άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_1 \in [3, 4]$  τέτοιο, ώστε:

$$g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_1) - f(3)f(4) = 0 \Leftrightarrow f^2(x_1) = f(3)f(4) \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε  $f^2(x_0) = f^2(x_1)$  και επειδή η συνάρτηση  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$  είναι  $f(x_0) = f(x_1)$ , οπότε η συνάρτηση  $f$  δεν είναι «1-1» και επομένως δεν αντιστρέφεται.

### ΘΕΜΑ 11ο (18ο – 2006)

Αν  $f$  συνεχής στο 0,  $f(0) = 2006$  και ισχύει  $xf(x) + x^4 \sin \frac{1}{x} = \eta\mu(ax)$ ,  $a \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$

A) i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$

ii) Να βρείτε το  $a$ .

B) i) Να βρείτε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $\mathbb{R}$

### ΛΥΣΗ

A) i) Για  $x \neq 0$  είναι  $f(x) = \frac{\eta\mu(ax)}{x} - x^3 \sin \frac{1}{x}$ , η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}^*$  ως πράξεις συνεχών και επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο 0 τότε η  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ .

ii) Κοντά στο  $x_0 = 0$  έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\eta\mu(ax)}{x} - x^3 \sin \frac{1}{x} \right] = a$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^3 \sin \frac{1}{x} \right) &= 0, \text{ γιατί για κάθε } x \neq 0 \text{ έχουμε } \left| x^3 \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x^3| \text{ ή} \\ &\left. \begin{aligned} -|x^3| &\leq x^3 \sin \frac{1}{x} \leq |x^3| \\ \lim_{x \rightarrow 0} |x^3| &= \lim_{x \rightarrow 0} (-|x^3|) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^3 \sin \frac{1}{x} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Επίσης έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( a \frac{\eta\mu(ax)}{ax} \right) = a \cdot 1 = a.$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = a \Leftrightarrow f(0) = a \Leftrightarrow a = 2006$ , γιατί η  $f$  είναι συνεχής στο 0.

B) i) Κοντά στο  $-\infty$  έχουμε:

$$f(x) = \frac{\eta\mu(ax)}{x} - x^3 \sin \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = 0 \text{ (Κριτήριο Παρεμβολής)}$$

$$\text{Πράγματι } \left| \frac{\eta\mu(ax)}{x} \right| \leq \left| \frac{1}{x} \right|$$

$$\left. -\left| \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\eta\mu(ax)}{x} \leq \left| \frac{1}{x} \right| \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu(ax)}{x} \leq -\frac{1}{x} \right\} \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( -\frac{1}{x} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) = -\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma\upsilon\nu \left( \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu t) = 1.$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , οπότε κοντά στο  $-\infty$ , υπάρχει  $\gamma < 0$ , ώστε  $f(\gamma) > 0$ .

ii) Κοντά στο  $+\infty$  έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\eta\mu(ax)}{x} - x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(ax)}{x} = 0 \text{ (Κριτήριο Παρεμβολής)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^3 \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right) = +\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma\upsilon\nu \left( \frac{1}{x} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu t) = 1$$

Άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , οπότε κοντά στο  $+\infty$ , υπάρχει  $\delta > 0$ , ώστε  $f(\delta) < 0$ .

Η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, αφού είναι συνεχής στο διάστημα  $[\gamma, \delta]$  και ισχύει  $f(\gamma)f(\delta) < 0$ .

Επομένως η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(\gamma, \delta) \subseteq \mathbb{R}$ .

### ΘΕΜΑ 12ο (19ο – 2006)

A) Αν συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, a]$  να αποδείξετε ότι  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$

B) Αν  $f(x) = \ln(1 + \varepsilon \varphi x)$ ,  $x \in \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$

i) Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2$  για κάθε  $x \in \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  και τις ευθείες  $y = 0$ ,  $x = 0$  και  $x = \frac{\pi}{4}$ .

## ΛΥΣΗ

A) Θέτουμε  $\alpha - x = u$ , οπότε  $du = -dx$ .

Για  $x = \alpha$  είναι  $u = 0$  και για  $x = 0$  είναι  $u = \alpha$ , οπότε έχουμε:

$$\int_0^{\alpha} f(\alpha - x) dx = - \int_{\alpha}^0 f(u) du = \int_0^{\alpha} f(u) du = \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

B) Είναι  $f(x) = \ln(1 + \varepsilon \varphi x)$ ,  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

$$\text{Για } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ είναι } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \geq -x \geq -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{4} - x \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{4} - x \leq \frac{\pi}{4}$$

Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \text{i) } f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) &= \ln\left(1 + \varepsilon \varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{\varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} - \varepsilon \varphi x}{1 + \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} \varepsilon \varphi x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1 - \varepsilon \varphi x}{1 + \varepsilon \varphi x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1 + \varepsilon \varphi x + 1 - \varepsilon \varphi x}{1 + \varepsilon \varphi x}\right) = \ln\left(\frac{2}{1 + \varepsilon \varphi x}\right) = \ln 2 - \ln(1 + \varepsilon \varphi x) \end{aligned}$$

Επομένως:

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln(1 + \varepsilon \varphi x) + \ln 2 - \ln(1 + \varepsilon \varphi x) \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2$$

ii) Αν  $E$  το ζητούμενο εμβαδόν, τότε έχουμε:  $E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} |\ln(1 + \varepsilon \varphi x)| dx$

Είναι:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \stackrel{\text{γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} \varepsilon \varphi 0 \leq \varepsilon \varphi x \leq \varepsilon \varphi \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 0 \leq \varepsilon \varphi x \leq 1 \stackrel{\text{γν. αύξουσα}}{\Leftrightarrow} 1 \leq 1 + \varepsilon \varphi x \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln 1 \leq \ln(1 + \varepsilon \varphi x) \leq \ln 2 \Leftrightarrow 0 \leq \ln(1 + \varepsilon \varphi x) \leq \ln 2$$

$$\text{Άρα } E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \varepsilon \varphi x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$$

$$\text{Από B (i) ερώτημα έχουμε } f(x) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \ln 2.$$

$$\text{Άρα } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2 dx$$

$$\text{Από (A) Ερώτημα για } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ έχουμε } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$$

$$\text{Άρα } 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \ln 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) \Rightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \frac{\pi}{4} \ln 2$$

$$\text{Επομένως } E = \frac{\pi}{8} \ln 2 \text{ τ.μ.}$$

## ΘΕΜΑ 13ο (20ο – 2006)

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \left(1 - \frac{\alpha}{3}\right)x^3 - x^2 + (\alpha - 1)^2x + 2006$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

i) Να βρείτε τον  $\alpha \in \mathbb{R}$ , αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ακρότατο στο  $x_0 = 1$

ii) Για  $\alpha = 1$

α) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$ .

## ΛΥΣΗ

i) Αναγκαία συνθήκη είναι:  $f'(1) = 0$ .

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f'(x) = (3 - \alpha)x^2 - 2x + (\alpha - 1)^2$$

$$\text{οπότε } f'(1) = (3 - \alpha) - 2 + (\alpha - 1)^2 = \alpha^2 - 3\alpha + 2 = (\alpha - 1)(\alpha - 2)$$

δηλαδή  $f'(1) = 0$  αν  $\alpha = 1$  ή  $\alpha = 2$ .

Για  $\alpha = 1$  είναι  $f'(x) = 2x^2 - 2x$ , οπότε έχουμε:

| x  | $-\infty$ | 0        | 1        | $+\infty$ |
|----|-----------|----------|----------|-----------|
| f' |           | +        | -        | +         |
| f  |           | ↗<br>τ.μ | ↘<br>τ.ε | ↗         |

Για  $\alpha = 2$  είναι  $f'(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ , οπότε έχουμε:

| x  | $-\infty$ | 1 | $+\infty$ |
|----|-----------|---|-----------|
| f' |           | + | +         |
| f  |           | ↗ | ↗         |

Δεκτή είναι η τιμή  $\alpha = 1$ .

ii) Για  $\alpha = 1$  έχουμε  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2006$ .

α) Από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών βρίσκουμε:

$$f((-\infty, 0]) = (-\infty, 2006]$$

$$f([0, 1]) = \left[\frac{6017}{3}, 2006\right]$$

$$f([1, +\infty)) = \left[\frac{6017}{3}, +\infty\right)$$

Επομένως η  $f$  έχει μοναδική πραγματική ρίζα  $\xi < 0$ .

$$\beta) E = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \left(\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2006\right) dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{3} + 2006x\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} + 2006 = \frac{12035}{6}$$

## ΘΕΜΑ 14ο (21ο – 2006)

Θεωρούμε συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- Η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων και στο σημείο  $A(1, f(1))$  δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.
- Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \neq 0$  ισχύει  $f''(x) - \frac{f'(x)}{x} = xe^x$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = xe^x - e^x - e\frac{x^2}{2} + 1$ .

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς  $f(e^{2004})$  και  $f(2004)$ .

γ) Αν η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε

$$\text{ότι } g(0) \leq \int_0^1 g(f(x))dx \leq g\left(1 - \frac{e}{2}\right).$$

## ΛΥΣΗ

α) Από υπόθεση έχουμε  $f(0) = 0$  και  $f'(1) = 0$ . Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι:

$$\frac{xf''(x) - f'(x)}{x^2} = e^x \Leftrightarrow \left(\frac{f'(x)}{x}\right)' = (e^x)' \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{x} = e^x + c, \quad x \in (-\infty, 0) \text{ ή } x \in (0, +\infty)$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \begin{cases} xe^x + c_1x, & x < 0 \\ \alpha, & x = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ xe^x + c_2x, & x > 0 \end{cases}$$

Έχουμε:

- $f'$  συνεχής στο  $x_0 = 0$  άρα  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = f'(0) \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot e^1 + c_2 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -e$
- $f'$  παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  άρα

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{xe^x + c_1x - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{xe^x + c_2x - 0}{x - 0} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + c_1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + c_2) \Leftrightarrow 1 + c_1 = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_1 = c_2.$$

Άρα  $c_1 = c_2 = -e$  και  $\alpha = 0$ , οπότε  $f'(x) = xe^x - ex$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f'(x) = \left( (x-1)e^x - e\frac{x^2}{2} \right)' \Leftrightarrow f(x) = (x-1)e^x - e\frac{x^2}{2} + k$$

Όμως  $f(0) = 0 \Leftrightarrow 0 - 1 - 0 + k = 0 \Leftrightarrow k = 1$ .

Άρα  $f(x) = xe^x - e^x - e\frac{x^2}{2} + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

β) Είναι  $e^{2004} > 2004$ . Πράγματι  $e^{2004} = (1 + (e-1))^{2004} > 1 + 2004(e-1) > 2004$   
 χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli.

1<sup>ος</sup> τρόπος :

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $f'(x) = ex(e^{x-1} - 1)$ . Ο πίνακας μεταβολών της  $f$  είναι:

| x     | $-\infty$ | 0          | 1 | $+\infty$  |                 |            |
|-------|-----------|------------|---|------------|-----------------|------------|
| f'(x) |           | +          | 0 | -          | 0               | +          |
| f(x)  |           | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | $1-\frac{e}{2}$ | $\nearrow$ |

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[1, +\infty)$ , οπότε έχουμε  $1 < 2004 < e^{2004}$ , άρα  $f(2004) < f(e^{2004})$ .

2<sup>ος</sup> τρόπος :

Η  $f$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο  $[2004, e^{2004}]$ , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (2004, e^{2004})$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(e^{2004}) - f(2004)}{e^{2004} - 2004} \Leftrightarrow f(e^{2004}) - f(2004) = (e^{2004} - 2004)f'(\xi) \Leftrightarrow$$

$$f(e^{2004}) - f(2004) = \underbrace{(e^{2004} - 2004)}_{>0} \underbrace{e\xi}_{>0} \underbrace{(e^{\xi-1} - 1)}_{>0} > 0 \text{ για κάθε } \xi \in (2004, e^{2004}).$$

Άρα  $f(e^{2004}) > f(2004)$ .

γ) Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[0, 1]$  και η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε για κάθε  $x \in [0, 1]$  έχουμε:

$$0 \leq x \leq 1 \quad \overset{f \text{ γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} \quad f(0) \geq f(x) \geq f(1) \quad \overset{g \text{ γν. φθίνουσα}}{\Leftrightarrow} \quad g(f(0)) \leq g(f(x)) \leq g(f(1)) \Leftrightarrow$$

$$g(0) \leq g(f(x)) \leq g\left(1 - \frac{e}{2}\right) \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

Επειδή η  $g \circ f$  είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών έχουμε:

$$\int_0^1 g(0) dx \leq \int_0^1 g(f(x)) dx \leq \int_0^1 g\left(1 - \frac{e}{2}\right) dx \Leftrightarrow$$

$$g(0)(1-0) \leq \int_0^1 g(f(x)) dx \leq g\left(1 - \frac{e}{2}\right)(1-0) \Leftrightarrow$$

$$g(0) \leq \int_0^1 g(f(x)) dx \leq g\left(1 - \frac{e}{2}\right).$$

### ΘΕΜΑ 15ο (22ο – 2006)

Δίνεται συνάρτηση  $h$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $h'(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να αποδείξετε ότι

i) Η συνάρτηση  $h$  είναι «1-1»

ii) Η εξίσωση  $h(x) = 0$  έχει το πολύ μια ρίζα.

β) Αν για τη συνάρτηση  $h$  ισχύει και  $h(x) + h(\lambda - x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι

i) Η εξίσωση  $h(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα.

ii)  $\int_0^\lambda h(x) dx = 0$ .

## ΛΥΣΗ

α) i) Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 \neq x_2$ , χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $x_1 < x_2$ .

Η συνάρτηση  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[x_1, x_2]$ , άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο,

$$\text{ώστε: } h'(\xi) = \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

$$\text{Επειδή } h'(\xi) \neq 0 \text{ θα είναι και } \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0 \Leftrightarrow h(x_2) \neq h(x_1).$$

Άρα για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 \neq x_2$  είναι  $h(x_1) \neq h(x_2)$ , οπότε η  $h$  είναι «1-1».

ii) Υποθέτουμε ότι η εξίσωση  $h(x)=0$  έχει δύο ρίζες  $\rho_1, \rho_2$  με  $\rho_1 \neq \rho_2$ .

Άρα  $h(\rho_1) = h(\rho_2) = 0$ . Επειδή η συνάρτηση  $h$  είναι «1-1» έχουμε  $\rho_1 = \rho_2$  άτοπο.

Επομένως η εξίσωση  $h(x)=0$  έχει το πολύ μια ρίζα.

β) i) Για  $x = \frac{\lambda}{2}$  έχουμε:

$$h\left(\frac{\lambda}{2}\right) + h\left(\lambda - \frac{\lambda}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 2h\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow h\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 0$$

Άρα ο αριθμός  $x = \frac{\lambda}{2}$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $h(x)=0$  και μάλιστα μοναδική αφού η συνάρτηση  $h$  είναι «1-1».

ii) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $h(x) = -h(\lambda - x)$ . Οπότε έχουμε:

$$I_1 = \int_0^{\lambda} h(x) dx = - \int_0^{\lambda} h(\lambda - x) dx = -I_2 \quad (1), \text{ όπου } I_2 = \int_0^{\lambda} h(\lambda - x) dx.$$

Θέτουμε  $u = \lambda - x$ , οπότε  $du = -dx$ .

Για  $x = 0$  είναι  $u = \lambda$  και για  $x = \lambda$  είναι  $u = 0$ .

Άρα

$$I_2 = - \int_{\lambda}^0 h(u) du = \int_0^{\lambda} h(x) dx = I_1 \quad (2).$$

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε } I_1 = -I_1 \Leftrightarrow 2I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = 0 \Leftrightarrow \int_0^{\lambda} h(x) dx = 0.$$

## ΘΕΜΑ 16ο (24ο – 2006)

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία για κάθε  $x \in (0, \beta - \alpha)$  ικανοποιεί τη σχέση  $g(\alpha + x) = g(\beta - x)$ .

Να αποδείξετε ότι:

i)  $g(\alpha) = g(\beta)$

ii) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη, η οποία είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

$$\text{iii) } \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x) dx = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x) dx$$

## ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(\alpha + x) = \lim_{w \rightarrow \alpha^+} g(w) = g(\alpha) \text{ αφού η } g \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = \alpha, \text{ όπου } w = \alpha + x.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(\beta - x) = \lim_{u \rightarrow \beta^-} g(u) = g(\beta) \text{ αφού η } g \text{ είναι συνεχής στο } x_0 = \beta, \text{ όπου } u = \beta - x.$$

Επομένως  $g(\alpha) = g(\beta)$ .ii) Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση  $g$  στο  $[\alpha, \beta]$ .

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $g'(\xi) = 0$ , δηλαδή η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$  έχει μία τουλάχιστον εφαπτομένη, που είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$ .

iii) Θέτουμε  $u = \beta - x$  στην αρχική σχέση η οποία γίνεται:

$$g(\alpha + \beta - u) = g(u), \text{ για κάθε } u \in (\alpha, \beta)$$

Επιπλέον από το (i) αποδείξαμε ότι  $g(\alpha) = g(\beta)$ .

Επομένως:

$$g(\alpha + \beta - x) = g(x), \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Άρα:

$$I = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x) dx = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(\alpha + \beta - x) dx \quad (1)$$

και θέτοντας  $y = \alpha + \beta - x$ , έχουμε ότι  $dy = -dx$  και για  $x = \alpha$  είναι  $y = \beta$  ενώ για  $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$

είναι  $y = \frac{\alpha + \beta}{2}$

Οπότε έχουμε:

$$I = - \int_{\beta}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(y) dy = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x) dx \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} g(x) dx = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} g(x) dx$$

## ΘΕΜΑ 17ο (25ο – 2006)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x - \lambda x + 1$ ,  $x > 0$ ,  $\lambda > 0$ .i) Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.ii) Έστω  $M$  το σημείο που αντιστοιχεί στο μέγιστο της  $C_f$ . Να βρείτε, για τις

διάφορες τιμές του  $\lambda$ , τη καμπύλη στην οποία κινείται το  $M$ .

iii) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του  $\lambda$ , ώστε να ισχύει  $\ln x \leq \lambda x - 1$ .

## ΛΥΣΗ

i) Για κάθε  $x > 0$  έχουμε  $f'(x) = \frac{1}{x} - \lambda$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\lambda}$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\lambda}$

Επομένως:

|    |   |                     |           |
|----|---|---------------------|-----------|
| x  | 0 | $\frac{1}{\lambda}$ | $+\infty$ |
| f' |   | +                   | 0         |
| f  |   | ↗                   | ↘         |

ii) Η  $C_f$  παρουσιάζει θέση μεγίστου στο σημείο  $M\left(\frac{1}{\lambda}, f\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right) = M\left(\frac{1}{\lambda}, -\ln\lambda\right)$

Για να βρούμε την καμπύλη στην οποία κινείται το M, κάνουμε απαλοιφή της παραμέτρου  $\lambda$ :

$$\left. \begin{matrix} y = -\ln\lambda \\ x = \frac{1}{\lambda} \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{matrix} y = -\ln\lambda \\ \lambda = \frac{1}{x} \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = -\ln\frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{y = \ln x}$$

iii) Θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$\ln x \leq \lambda x - 1, \quad x > 0 \quad \text{ή}$$

$$\frac{\ln x + 1}{x} \leq \lambda, \quad x > 0$$

Αν η συνάρτηση  $h(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$  έχει ολικό μέγιστο, τότε αυτό θα ισούται με την ελάχιστη τιμή του  $\lambda$  για την οποία ισχύει η προηγούμενη ανισότητα.

$$\text{Για κάθε } x > 0 \text{ έχουμε: } h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (\ln x + 1)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}$$

|    |   |   |           |
|----|---|---|-----------|
| x  | 0 | 1 | $+\infty$ |
| h' |   | + | 0         |
| h  |   | ↗ | ↘         |

Επομένως  $\lambda = h(1) = 1$

## ΘΕΜΑ 18ο (28ο – 2006)

Έστω συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοια ώστε:

- Για κάθε  $x > 0, y > 0$  ισχύει  $f(xy) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$
- Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο 1 και  $f'(1) = 1$ .

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(xh) - f(x)}{xh - x} = \frac{2f(x)}{x} + x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη και ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3$$

iii) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$f(x) = x^2 \ln x$$

iv) Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

v) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = e$ .

### ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(xh) - f(x)}{xh - x} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{x^2 f(h) + h^2 f(x) - f(x)}{x(h-1)} = \lim_{h \rightarrow 1} \left[ \frac{f(x)(h^2 - 1)}{x(h-1)} + \frac{x^2 f(h)}{x(h-1)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 1} \left[ \frac{f(x)(h+1)}{x} + x \frac{f(h)}{h-1} \right] \stackrel{(\alpha)}{=} \frac{2f(x)}{x} + x \cdot f'(1) = \frac{2f(x)}{x} + x$$

$$(\alpha) \text{ (διότι } f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 1)$$

Η ισότητα  $f(1) = 0$  προκύπτει από τη δοθείσα σχέση για  $x = y = 1$ .

ii) Σε κάθε  $x_0 > 0$  είναι  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  (και αν θέσουμε  $x = x_0 h$ )

$$= \lim_{h \rightarrow 1} \frac{f(x_0 h) - f(x_0)}{x_0 h - x_0} = \frac{2f(x_0)}{x_0} + x_0 \text{ (από το 1}^\circ \text{ ερώτημα)}$$

Άρα  $f'(x_0) = \frac{2f(x_0)}{x_0} + x_0$  για κάθε  $x_0 > 0$  επομένως η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \frac{2f(x)}{x} + x \Leftrightarrow xf'(x) = 2f(x) + x^2 \text{ ή } x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3, \text{ για κάθε } x > 0.$$

iii) Για κάθε  $x > 0$  είναι:

$$x^2 f'(x) = 2xf(x) + x^3 \Leftrightarrow x^2 f'(x) - 2xf(x) = x^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 f'(x) - 2xf(x)}{x^4} = \frac{1}{x} \text{ άρα } \left( \frac{f(x)}{x^2} \right)' = (\ln x)', \quad x > 0$$

Επομένως  $\frac{f(x)}{x^2} = \ln x + c$  και επειδή  $f(1) = 0$  βρίσκουμε  $c = 0$ .

Άρα  $f(x) = x^2 \ln x, x > 0$ .

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

- ν) Αν  $\Omega$  το χωρίο που ορίζεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=e$ , τότε το εμβαδόν του είναι:

$$E(\Omega) = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e |x^2 \ln x| dx$$

όμως  $\ln x \geq 0$  για κάθε  $x \in [1, e]$  άρα και  $x^2 \ln x \geq 0$  για κάθε  $x \in [1, e]$

Επομένως έχουμε:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_1^e x^2 \ln x dx = \int_1^e \left( \frac{x^3}{3} \right)' \ln x dx = \left[ \frac{x^3}{3} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} (\ln x)' dx = \\ &= \frac{e^3}{3} \ln e - \frac{1}{3} \ln 1 - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_1^e = \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \left( \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9} \text{ μονάδες εμβαδού.} \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 19ο (29ο – 2006)

Δίνεται συνάρτηση  $f$  με συνεχή παράγωγο στο  $[a, \beta]$  για την οποία ισχύει:

$$\int_a^\beta f^2(x) dx + \int_a^\beta (f'(x))^2 dx = f^2(a) - f^2(\beta)$$

- i) Να αποδείξετε ότι  $f'(x) + f(x) = 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$

- ii) Να αποδείξετε ότι  $\int_a^\beta (f'(x))^2 dx = \int_a^\beta f^2(x) dx = \frac{1}{2}(f^2(a) - f^2(\beta))$

- iii) Αν  $f\left(\frac{a+\beta}{2}\right) = e^{\frac{a+\beta}{2}}$  να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$ .

### ΛΥΣΗ

- i) Είναι:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^\beta f^2(x) dx + \int_a^\beta (f'(x))^2 dx = \\ &= \int_a^\beta f^2(x) dx + \int_a^\beta (f'(x))^2 dx + \int_a^\beta 2f(x)f'(x) dx - \int_a^\beta 2f(x)f'(x) dx = \\ &= \int_a^\beta [f^2(x) + (f'(x))^2 + 2f(x)f'(x)] dx - \int_a^\beta [f^2(x)]' dx = \\ &= \int_a^\beta (f(x) + f'(x))^2 dx - [f^2(x)]_a^\beta = \\ &= \int_a^\beta (f(x) + f'(x))^2 dx - f^2(\beta) + f^2(a) \end{aligned}$$

Από υπόθεση είναι  $I = f^2(\alpha) - f^2(\beta)$ , οπότε  $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + f'(x))^2 dx = 0$ .

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) + f'(x_0) \neq 0$  και επειδή

$(f(x) + f'(x))^2 \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ , τότε θα είναι  $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + f'(x))^2 dx > 0$ , άτοπο.

Άρα  $f(x) + f'(x) = 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$ .

ii) Για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  είναι  $f'(x) = -f(x)$ , οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (f'(x))^2 dx &= \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)f'(x)dx = - \int_{\alpha}^{\beta} f(x)f'(x)dx = \\ &= - \left[ \frac{f^2(x)}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2} (f^2(\alpha) - f^2(\beta)) \quad (1) \end{aligned}$$

Από τη δοθείσα σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx + \frac{1}{2} (f^2(\alpha) - f^2(\beta)) &= f^2(\alpha) - f^2(\beta) \Leftrightarrow \\ \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx &= \frac{1}{2} (f^2(\alpha) - f^2(\beta)) \quad (2) \end{aligned}$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f'(x))^2 dx = \int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx = \frac{1}{2} (f^2(\alpha) - f^2(\beta))$$

iii. Για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) &= 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (e^x f(x))' &= 0 \Leftrightarrow e^x f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = ce^{-x}, \quad x \in [\alpha, \beta] \end{aligned}$$

$$\text{Όμως } f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}}, \text{ άρα } c \cdot e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow c = e^{\alpha+\beta}$$

$$\text{Άρα } f(x) = e^{\alpha+\beta} \cdot e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = e^{-x+\alpha+\beta}, \quad x \in [\alpha, \beta].$$

#### ΘΕΜΑ 20ο (30ο – 2006)

Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $[0, 1]$  με  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , για την οποία υπάρχει  $x_0 \in [0, 1]$  με  $f(x_0) \neq 0$ .

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$ .

ii) Αν επιπλέον η συνάρτηση  $f$  είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$  και ισχύει

$$f(0) = f(1) = 0, \text{ να αποδείξετε ότι υπάρχουν } \xi_1, \xi_2 \in (0, 1) \text{ ώστε } f''(\xi_1) \cdot f''(\xi_2) \leq 0.$$

## ΛΥΣΗ

i) Έστω ότι η  $f$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $[0,1]$ .

- Αν ήταν  $f(x_0) > 0$  θα είχαμε  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [0,1]$ , άρα  $\int_0^1 f(x)dx > 0$  άτοπο.
- Αν ήταν  $f(x_0) < 0$  θα είχαμε  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in [0,1]$ , άρα  $\int_0^1 f(x)dx < 0$  άτοπο.

Άρα η  $f$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $[0,1]$  οπότε υπάρχουν  $x_1, x_2 \in [0,1]$  τέτοια, ώστε  $f(x_1)f(x_2) < 0$ . Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι  $x_1 < x_2$ .

Επειδή  $f$  συνεχής στο  $[x_1, x_2]$  υπάρχει  $\rho \in (x_1, x_2) \subseteq (0,1)$  ώστε  $f(\rho) = 0$ .

ii) Έστω ότι η συνάρτηση  $f''$  διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(0,1)$  π.χ.  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0,1)$ .

Επειδή η συνάρτηση  $f'$  είναι συνεχής στο  $[0,1]$ , αφού είναι παραγωγίσιμη, τότε  $f' \nearrow$  στο  $[0,1]$  και επομένως  $f'$  είναι «1-1» στο  $[0,1]$ .

Επειδή  $f(0) = f(\rho) = f(1) = 0$  ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στα διαστήματα  $[0,\rho]$  και  $[\rho,1]$ , οπότε υπάρχουν  $\rho_1 \in (0,\rho)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\rho_1) = 0$  και  $\rho_2 \in (\rho,1)$  ώστε  $f'(\rho_2) = 0$ .

Έχουμε  $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) \stackrel{f': 1-1}{\Leftrightarrow} \rho_1 = \rho_2$ , άτοπο, αφού  $\rho_1, \rho_2$  ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

Άρα η συνάρτηση  $f''$  δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $(0,1)$ , οπότε υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (0,1)$  τέτοια, ώστε  $f''(\xi_1)f''(\xi_2) \leq 0$ .

## ΘΕΜΑ 21ο (31ο – 2006)

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ , με συνεχή παράγωγο,  $a \neq \beta \neq 0$ ,  $f(a) = \beta$  και  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

A) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}$

B) Αν η συνάρτηση  $f^{-1}$  είναι συνεχής και ισχύει  $\int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(t)dt + \int_a^\beta f(t)dt = 0$ , τότε:

i) Να βρεθεί το  $f(\beta)$

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  να είναι κάθετη στην ευθεία  $(\varepsilon_1): x - y + 2006 = 0$

Γ) Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (a, \beta)$ , τέτοιο ώστε  $f(\xi) = \xi$ .

ii) Υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2 \in (a, \beta)$  τέτοια ώστε  $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$ .

## ΛΥΣΗ

A) Επειδή  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$  η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[a, \beta]$ , οπότε είναι και «1-1», άρα η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}$ . Αφού η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$  και γνησίως φθίνουσα στο  $[a, \beta]$ , το σύνολο τιμών της είναι  $f([a, \beta]) = [f(\beta), f(a)] = [f(\beta), \beta]$ . Επομένως  $A_{f^{-1}} = [f(\beta), \beta]$ .

**B) i)** Έστω  $I = \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t) dt$ . Θέτουμε  $u = f^{-1}(t) \Leftrightarrow f(u) = t$  δηλαδή  $f'(u) du = dt$ .

Για  $t = f(\alpha)$  έχουμε  $u_1 = f^{-1}(f(\alpha)) = \alpha$  και για  $t = f(\beta)$  έχουμε  $u_2 = f^{-1}(f(\beta)) = \beta$ .

$$\text{Άρα } \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} u f'(u) du = [u f(u)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} u' f(u) du = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} f(u) du$$

$$\text{Άρα } \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t) dt = \beta \cdot f(\beta) - \alpha \cdot \beta - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (I).$$

$$\text{Αλλά } \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(t) dt + \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0 \text{ άρα από (I) έχουμε:}$$

$$\beta f(\beta) - \alpha \beta - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0.$$

$$\text{Δηλαδή } \beta[f(\beta) - \alpha] = 0, \beta \neq 0. \text{ Άρα } f(\beta) = \alpha.$$

**B) ii)** Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε

$f'(x_0) = -1$  ή ότι η εξίσωση  $f'(x) = -1 \Leftrightarrow (f(x) + x)' = 0$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(\alpha, \beta)$ .

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) + x$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$ .

Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  και παραγωγίσιμη στο  $(\alpha, \beta)$  με

$$g'(x) = f'(x) + 1.$$

Επίσης είναι:

$$\left. \begin{aligned} g(\alpha) &= f(\alpha) + \alpha = \beta + \alpha \\ g(\beta) &= f(\beta) + \beta = \alpha + \beta \end{aligned} \right\} \text{ οπότε } g(\alpha) = g(\beta).$$

Άρα από Θεώρημα Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow (f(x_0) + x_0)' = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = -1.$$

**Γ) i)** Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) - x$ ,  $x \in [\alpha, \beta]$ .

Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $[\alpha, \beta]$  ως διαφορά συνεχών.

Επίσης είναι:

$$h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = \beta - \alpha$$

$$h(\beta) = f(\beta) - \beta = \alpha - \beta = -(\beta - \alpha).$$

Οπότε είναι:

$$h(\alpha)h(\beta) = -(\beta - \alpha)^2 < 0.$$

Άρα από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση  $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , δηλαδή υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) - \xi = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi$ .

Όμως  $h'(x) = f'(x) - 1$  και επειδή  $f'(x) < 0$  είναι  $h'(x) < 0$ . Άρα η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[\alpha, \beta]$ . Συνεπώς το  $\xi \in (\alpha, \beta)$  είναι μοναδικό.

- ii) Για τη συνάρτηση  $f$  ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα  $[α, ξ]$  και  $[ξ, β]$ . Άρα θα υπάρχουν  $ξ_1 ∈ (α, ξ)$  και  $ξ_2 ∈ (ξ, β)$  τέτοια, ώστε:

$$f'(ξ_1) = \frac{f(ξ) - f(α)}{ξ - α} \stackrel{\text{Λόγω i)}}{=} \frac{ξ - β}{ξ - α} \quad (1) \text{ και } f'(ξ_2) = \frac{f(β) - f(ξ)}{β - ξ} \stackrel{\text{Λόγω i)}}{=} \frac{α - ξ}{β - ξ} = \frac{ξ - α}{ξ - β} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχουμε:

$$f'(ξ_1)f'(ξ_2) = \frac{ξ - β}{ξ - α} \cdot \frac{ξ - α}{ξ - β} = 1$$

### ΘΕΜΑ 22ο (32ο – 2006)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x ∈ ℝ$ .

A) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια:

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{f(x)}$  και ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{f(x) - 1}$

B) α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν  $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{f(x)} dx$ ,  $v = 0, 1, 2, 3, \dots$

i) Να βρείτε τα  $I_0, I_1$

ii) Να αποδείξετε ότι  $(2v+1)I_v = \sqrt{2} - 2vI_{v-1}$ ,  $v = 2, 3, \dots$  και μετά να βρείτε το  $I_3$ .

### ΛΥΣΗ

A) i) Κοντά στο  $+\infty$  έχουμε:

$$\left| \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Άρα:

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0$  από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{f(x)} = 0$ .

ii) Κοντά στο 0 έχουμε:

$$g(x) = \frac{\eta \mu x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)\eta \mu x}{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)\eta \mu x}{x^2}$$

Άρα:

$$g(x) = \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 1} + 1}{x}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x} = +\infty$$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x} \right) = -\infty \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x} \right) = +\infty$$

Άρα δεν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

**Β) α)** Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\text{Αν } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(-\infty, 0]$ , γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$  και παρουσιάζει ελάχιστο στο  $0$  με  $f(0) = 1$

**β) i)** Είναι:

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[ \sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

$$\text{Άρα } I_0 = \sqrt{2} - 1$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^2 (\sqrt{x^2+1})' dx = \\ &= \left[ x^2 (\sqrt{x^2+1}) \right]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' \sqrt{x^2+1} dx = \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 (x^2+1)' (x^2+1)^{1/2} dx = \sqrt{2} - \left[ \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2}{3} \sqrt{2^3} + \frac{2}{3} = \sqrt{2} - \frac{4}{3} \sqrt{2} + \frac{2}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Άρα } I_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii) } I_v &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{2v} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 x^{2v} \left( \sqrt{x^2+1} \right)' dx = \\
 &= \left[ x^{2v} \sqrt{x^2+1} \right]_0^1 - \int_0^1 (x^{2v})' \sqrt{x^2+1} dx = \sqrt{2} - \int_0^1 2vx^{2v-1} \sqrt{x^2+1} dx = \\
 &= \sqrt{2} - 2v \int_0^1 x^{2v-1} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{2} - 2v \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v-1}}{\sqrt{x^2+1}} dx = \\
 &= \sqrt{2} - 2v \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx - 2v \int_0^1 \frac{x^{2(v-1)+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$I_v = \sqrt{2} - 2vI_v - 2vI_{v-1} \Leftrightarrow$$

$$I_v + 2vI_v = \sqrt{2} - 2vI_{v-1} \Leftrightarrow$$

$$(2v+1)I_v = \sqrt{2} - 2vI_{v-1}, \quad v=2,3,\dots$$

Για  $v=3$  έχουμε:  $7I_3 = \sqrt{2} - 6I_2$  (1)

Για  $v=2$  έχουμε:  $5I_2 = \sqrt{2} - 4I_0$

Αλλά  $I_0 = \sqrt{2} - 1$

Άρα:

$$5I_2 = \sqrt{2} - 4(\sqrt{2} - 1) \Leftrightarrow$$

$$5I_2 = \sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 4 \Leftrightarrow$$

$$5I_2 = 4 - 3\sqrt{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{4-3\sqrt{2}}{5} \quad (2)$$

Από (1), (2) έχουμε:

$$7I_3 = \sqrt{2} - \frac{6(4-3\sqrt{2})}{5} \Leftrightarrow$$

$$35I_3 = 5\sqrt{2} - 24 + 18\sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$35I_3 = 23\sqrt{2} - 24 \Leftrightarrow I_3 = \frac{23\sqrt{2} - 24}{35}$$