

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2008
ΕΠΙΚΑΙΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΥΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο (7ο – 2008)

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με:

$$g(x) = \frac{(1-f(\kappa))x^7 + x^5 + 1}{f(\kappa)x^6 + 4x^4 + 2}, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

α) Να αιτιολογήσετε την άποψη ότι έχει νόημα η αναζήτηση των ορίων:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

γ) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2008) < 0$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

δ) Αν $f(\kappa) \in [0, 1]$ και για τη συνάρτηση $h(x) = g(x) + 2008 + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1, \text{ να βρείτε τις τιμές των } \beta \text{ και } f(\kappa).$$

ΛΥΣΗ

α) Είναι $g(x) = \frac{(1-f(\kappa))x^7 + x^5 + 1}{f(\kappa)x^6 + 4x^4 + 2}, \quad \kappa \in \mathbb{R}$

Μπορούμε να αναζητήσουμε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ αν το πεδίο ορισμού της g περιέχει διάστημα

της μορφής $(-\infty, \alpha)$ και $(\beta, +\infty)$ αντίστοιχα. Επειδή η g είναι ρητή της μορφής $g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ το πεδίο

ορισμού είναι $D_g = \mathbb{R} - \{x_0 \in \mathbb{R} : Q(x_0) = 0\}$

Επειδή μόνο μεμονωμένες τιμές μπορεί να μηδενίζουν τον παρονομαστή άρα το πεδίο ορισμού της g περιέχει διάστημα της μορφής $(-\infty, \alpha)$ και $(\beta, +\infty)$.

β) Αν $f(\kappa) \neq 0$ και $f(\kappa) \neq 1$ έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1-f(\kappa))x^7 + x^5 + 1}{f(\kappa)x^6 + 4x^4 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)} \cdot x \right] = \frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x$$

Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

i) Αν $\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)} > 0 \Leftrightarrow (1-f(\kappa))f(\kappa) > 0 \Leftrightarrow 0 < f(\kappa) < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

ii) Αν $\frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)} < 0 \Leftrightarrow f(\kappa) < 0$ ή $f(\kappa) > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

iii) Αν $f(\kappa) = 1$ τότε $g(x) = \frac{x^5 + 1}{x^6 + 4x^4 + 2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 + 1}{x^6 + 4x^4 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{x^6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

iv) Αν $f(\kappa) = 0$ τότε $g(x) = \frac{x^7 + x^5 + 1}{4x^4 + 2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^7}{4x^4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4} x^3 \right) = +\infty$

$$\text{Επομένως } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } 0 \leq f(\kappa) < 1 \\ -\infty, & \text{αν } f(\kappa) < 0 \text{ ή } f(\kappa) > 1 \\ 0, & \text{αν } f(\kappa) = 1 \end{cases}$$

γ) Από υπόθεση γνωρίζουμε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, όμως $f(2008) < 0$ άρα και $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και $f(\kappa) < 0$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} x$$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty, f(\kappa) < 0, 1-f(\kappa) > 0, \text{ άρα } \frac{1-f(\kappa)}{f(\kappa)} < 0 \text{ επομένως } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

δ) $h(x) = g(x) + 2008 + \beta \Leftrightarrow h(x) - \beta = g(x) + 2008$

$$\text{Από το (β) ερώτημα προκύπτει ότι αν το } f(\kappa) \in [0, 1) \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\text{Άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty, \text{ άτοπο γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$$

$$\text{Αν } f(\kappa) = 1 \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - \beta) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + 2008) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + 2008 = 0 + 2008 = 2008,$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - \beta) = 2008 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \beta = 2008 \Leftrightarrow 1 - \beta = 2008 \Leftrightarrow \beta = -2007$$

ΘΕΜΑ 2ο (8ο – 2008)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 a^{\frac{1}{x}} + a^x - 2ax$, με $a > 1$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $f(x) = 0$.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

$$\alpha) \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} \right) = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{u = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0}} \lim_{u \rightarrow 0} \alpha^u \stackrel{\alpha^x \text{ συνεχής στο } 0}{=} \alpha^0 = 1.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2\alpha x) = +\infty, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x^2 \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{u = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty}} \lim_{u \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{u^2} \cdot \alpha^u \right) = 0, \text{ γιατί } \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{u^2} = 0 \text{ και } \lim_{u \rightarrow -\infty} \alpha^u = 0.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^-} \alpha^x = \alpha^0 = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2\alpha x) = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x^2 \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{u = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^u}{u^2} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha^u)'}{(u^2)'} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^u \cdot \ln \alpha}{2u} \stackrel{\left(\frac{+\infty}{+\infty} \right)}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^u \cdot (\ln \alpha)^2}{2} = +\infty.$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha^x = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\alpha x) = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(x \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} + \frac{\alpha^x}{x} - 2\alpha \right) \right] = +\infty$$

β) Για κάθε $x \in A$ η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 2x \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} + x^2 \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} \cdot \ln \alpha \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' + \alpha^x \cdot \ln \alpha - 2\alpha = 2x \cdot \alpha^{\frac{1}{x}} - \alpha^{\frac{1}{x}} \cdot \ln \alpha + \alpha^x \cdot \ln \alpha - 2\alpha$$

$$\text{Η } f' \text{ είναι παραγωγίσιμη με } f''(x) = 2\alpha^{\frac{1}{x}} - 2 \cdot \frac{\alpha^{\frac{1}{x}} \cdot \ln \alpha}{x} + \frac{\alpha^{\frac{1}{x}} \cdot (\ln \alpha)^2}{x^2} + \alpha^x \cdot (\ln \alpha)^2 =$$

$$= \alpha^{\frac{1}{x}} \cdot \left[2 - 2 \cdot \frac{\ln \alpha}{x} + \left(\frac{\ln \alpha}{x} \right)^2 \right] + \alpha^x \cdot (\ln \alpha)^2 = \alpha^{\frac{1}{x}} \cdot \left[1 + \left(1 - \frac{\ln \alpha}{x} \right)^2 \right] + \alpha^x \cdot (\ln \alpha)^2$$

Είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in A$, οπότε η f' γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $f'(1) = 0$. Άρα για $x > 1$, επειδή f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, είναι

$$f'(x) > f'(1), \text{ άρα } f'(x) > 0.$$

Για $0 < x < 1$ έχουμε $f'(x) < f'(1)$ άρα $f'(x) < 0$.

Έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \ln \alpha - 2\alpha < 0$, γιατί για κάθε $\alpha > 1$ είναι

$$\begin{cases} \ln \alpha < \alpha - 1 \\ -\alpha < -1 \end{cases} \text{ άρα } \ln \alpha - \alpha < \alpha - 2 \Leftrightarrow \ln \alpha - 2\alpha < -2 \text{ άρα } \ln \alpha - 2\alpha < 0.$$

Η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, οπότε

$$f'((-\infty, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x), \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \right) = (-\infty, \ln a - 2a). \text{ Άρα } f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0),$$

αφού $\ln a - 2a < 0$.

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

ελάχιστο

Η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $f(1) = 0$.

γ) Το σύνολο τιμών της είναι $f(A) = (1, +\infty) \cup [0, +\infty) = [0, +\infty)$.

δ) Από τον πίνακα μεταβολών έχουμε ότι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

ΘΕΜΑ 3ο (9ο – 2008)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- Η f έχει όριο στο $+\infty$
- $f(x) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

β) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

δ) Η f έχει δεύτερη παράγωγο και είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

ε) Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e + 1$ είναι $E = \frac{3}{2}$ τ.μ.

ΛΥΣΗ

α) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + e^{f(x)}) = -\infty$, ενώ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + e^{f(x)}) = \ell + e^\ell$, ενώ $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, άρα καταλήγουμε σε άτοπο.

Επειδή από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχει το όριο της f στο $+\infty$ υποχρεωτικά $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, είναι $(f(x) + e^{f(x)})' = (x)'$, άρα $f'(x) \cdot (1 + e^{f(x)}) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{f(x)}} > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα είναι και "1-1", οπότε αντιστρέφεται και ισχύει:

$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, άρα έχουμε $y + e^y = f^{-1}(y)$, οπότε $f^{-1}(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

δ) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η $\frac{1}{1+e^{f(x)}}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η $f'(x)$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή η f έχει δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = \frac{-f'(x)e^{f(x)}}{(1+e^{f(x)})^2} < 0$

(αφού $f'(x) > 0$), οπότε η f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

ε) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για $x \geq 1$ είναι $f(x) \geq f(1) = 0$, άρα $E = \int_1^{e+1} |f(x)| dx = \int_1^{e+1} f(x) dx$

Θέτουμε $u = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(u)$, οπότε $dx = (f^{-1}(u))' du = (e^u + u)' du = (e^u + 1) du$

Για $x = 1$ είναι $u = f(1) = 0$, γιατί $f^{-1}(0) = 1 \Leftrightarrow f(1) = 0$ και

για $x = e+1$ είναι $u = f(e+1) = 1$, γιατί $f^{-1}(1) = e+1 \Leftrightarrow f(e+1) = 1$, άρα

$$E = \int_0^1 u(e^u + 1) du = \int_0^1 ue^u du + \int_0^1 u du = \int_0^1 u(e^u)' du + \int_0^1 u du = [ue^u]_0^1 - \int_0^1 e^u du + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο (10ο – 2008)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\frac{x \cdot f(x) + 5}{1 + f^2(x)} = \frac{1}{2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 3$$

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Αν $g(x) = \ln f(x)$ τότε:

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g .

β) Να βρείτε την g' και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx$

γ) Να αποδείξετε ότι $J + 9I = K$, όπου:

$$J = \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx \text{ και } K = \int_0^4 \sqrt{x^2 + 9} dx$$

δ) Να αποδείξετε ότι $J + K = 20$

ε) Να υπολογίσετε τα J, K .

στ) Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και να ορίσετε την g^{-1} .

ΛΥΣΗ

A. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\frac{x \cdot f(x) + 5}{1 + f^2(x)} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + f^2(x) = 2x \cdot f(x) + 10 \Leftrightarrow f^2(x) - 2x \cdot f(x) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) - 2x \cdot f(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow h^2(x) = x^2 + 9 \quad (1),$$

όπου $h(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x^2 + 9 > 0 \Leftrightarrow h^2(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) \neq 0$ και επειδή η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Για $x = 0$ έχουμε $h(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$, οπότε $h(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως από

$$(1) \Leftrightarrow h(x) = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}, x \in \mathbb{R}$$

Β. α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x + \sqrt{x^2 + 9} > x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$. Άρα $A = \mathbb{R}$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 9}} \cdot (x + \sqrt{x^2 + 9})' \Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 9}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}}\right) \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 9}} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 9}} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}}$$

$$\text{Είναι } I = \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int_0^4 g'(x) dx = [g(x)]_0^4 = g(4) - g(0) = \ln 9 - \ln 3 = \ln \frac{9}{3} = \ln 3$$

$$\gamma) J + 9I = \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx + 9 \int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int_0^4 \frac{x^2 + 9}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = \int_0^4 \sqrt{x^2 + 9} dx = K$$

$$\begin{aligned} \delta) K &= \int_0^4 (x)' \cdot \sqrt{x^2 + 9} dx = \left[x \cdot \sqrt{x^2 + 9} \right]_0^4 - \int_0^4 x \cdot (\sqrt{x^2 + 9})' dx = \\ &= 20 - \int_0^4 x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}} \cdot (x^2 + 9)' dx = 20 - \int_0^4 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 9}} dx = 20 - J. \text{ Άρα } J + K = 20 \end{aligned}$$

$$\epsilon) \text{ Λύνουμε το σύστημα: } \begin{cases} J - K = -9I \\ J + K = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J - K = -9 \ln 3 \\ J + K = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} J = 10 - \frac{9}{2} \ln 3 \\ K = 10 + \frac{9}{2} \ln 3 \end{cases}$$

στ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} > 0$. Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και "1-1", άρα αντιστρέφεται.

Για να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης λύνουμε την εξίσωση $y = g(x)$ ως προς x . Είναι

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 9}) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 9} = e^y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 9} = e^y - x \Leftrightarrow x^2 + 9 = (e^y - x)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9 = e^{2y} - 2xe^y + x^2 \Leftrightarrow 2xe^y = e^{2y} - 9 \Leftrightarrow x = \frac{e^{2y} - 9}{2e^y} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{e^{2y} - 9}{2e^y}$$

$$\text{Όμως } e^y > x \Leftrightarrow e^y > \frac{e^{2y} - 9}{2e^y} \Leftrightarrow 2e^{2y} > e^{2y} - 9 \Leftrightarrow e^{2y} > -9, \text{ αληθής για κάθε } y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \frac{e^{2x} - 9}{2e^x}.$$

ΘΕΜΑ 5ο (12ο – 2008)

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1)-7}{x-1} = 10$.

1) Να αποδείξετε ότι: α) $f(3) = 7$

β) $f'(3) = 5$

2) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3, f(3))$.

α) Να αποδείξετε ότι η (ε) έχει εξίσωση $y = 5x - 8$.

β) Ένα σημείο Σ, που έχει τετμημένη μεγαλύτερη του 3, κινείται στην ευθεία (ε). Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 2 m/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ.

ΛΥΣΗ

1. α) Θέτουμε $h(x) = \frac{f(2x+1)-7}{x-1} \Leftrightarrow f(2x+1) = (x-1)h(x) + 7$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 1} f(2x+1) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)h(x) + 7] = 7 \quad (1)$$

Θέτουμε $2x+1 = \omega$, (όταν $x \rightarrow 1$ το $\omega \rightarrow 3$), άρα η (1) $\Leftrightarrow \lim_{\omega \rightarrow 3} f(\omega) = 7 \stackrel{f \text{ συνεχής}}{\Leftrightarrow} f(3) = 7$.

β) Για $x \neq 1$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1)-7}{x-1} = 10 \stackrel{f(3)=7}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x+1)-f(3)}{x-1} = 10 \quad (2)$

Θέτουμε $2x+1 = \omega$, (όταν $x \rightarrow 1$ το $\omega \rightarrow 3$), άρα η (2) για $\omega \neq 3$ γίνεται

$$\lim_{\omega \rightarrow 3} \frac{f(\omega)-f(3)}{\frac{\omega-1}{2}-1} = 10 \Leftrightarrow \lim_{\omega \rightarrow 3} \frac{f(\omega)-f(3)}{\frac{\omega-3}{2}} = 10 \Leftrightarrow \lim_{\omega \rightarrow 3} \left[2 \cdot \frac{f(\omega)-f(3)}{\omega-3} \right] = 10,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\lim_{\omega \rightarrow 3} \frac{f(\omega)-f(3)}{\omega-3} = 5$, άρα $f'(3) = 5$.

2. α) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(3, f(3))$

$$(ε): y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Leftrightarrow y - 7 = 5(x - 3) \Leftrightarrow y = 5x - 8$$

β) Έστω Σ(x, y) σημείο της (ε). Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΣ είναι:

$$\begin{aligned} (ΟΜΣ) &= \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} \overline{OM} & \overline{OS} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ x & y \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |3y - 7x| = \frac{1}{2} |3(5x - 8) - 7x| = \\ &= \frac{1}{2} |8(x - 3)| = 4|x - 3| = 4x - 12, \quad (x > 3) \end{aligned}$$

Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΣ είναι:

$$(E(x(t)))' = (4x(t) - 12)' = 4x'(t) = 4 \cdot 2 = 8 \text{ m}^2/\text{sec}$$

ΘΕΜΑ 6ο (13ο – 2008)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + e^x - 1$

- 1) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- 2) Να λύσετε την εξίσωση $e^x = 1 - x$
- 3) Θεωρούμε τη γνησίως μονότονη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$.
- α) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.
- β) Να αποδείξετε ότι $g(0) = 0$
- 4) Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) > 0$
- 5) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο $M(e, 1)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο M .

ΛΥΣΗ

- 1) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 1 + e^x > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- 2) Είναι $e^x = 1 - x \Leftrightarrow e^x + x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$. Προφανής λύση η $x = 0$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και "1-1" η λύση αυτή είναι μοναδική.
- 3) α) Έστω ότι η g δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in A_g$ με $x_1 < x_2$, ώστε

$$\begin{cases} g(x_1) \geq g(x_2) \\ e^{g(x_1)} \geq e^{g(x_2)} \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} g(x_1) + e^{g(x_1)} \geq g(x_2) + e^{g(x_2)} \Leftrightarrow 2x_1 + 1 \geq 2x_2 + 1 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2 \text{ άτοπο, άρα η } g$$

είναι γνησίως αύξουσα.

β) Ισχύει $g(0) + e^{g(0)} = 1$ προφανής λύση η $g(0) = 0$ και επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα άρα και "1-1" η λύση αυτή είναι μοναδική.

- 4) Είναι $g(f(x)) > 0 \Leftrightarrow g(f(x)) > g(0) \stackrel{g \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0$
- 5) Η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι και "1-1".

Το σημείο $M \in C_{f^{-1}}$, αν και μόνο αν, το συμμετρικό του M ως προς την $y = x$, δηλαδή το σημείο $N(1, e) \in C_f$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο N είναι:

$$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y = (1 + e)x - 1$$

Η συμμετρική της (ε) ως προς την $y = x$ θα είναι η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο M και βρίσκουμε

$$\text{ότι έχει εξίσωση } y = \frac{1}{1+e}x + \frac{1}{1+e}$$

ΘΕΜΑ 7ο (17ο – 2008)

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x)f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Η $g(x) = f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{f(-x)}{f(x)} dx = \frac{f^2(0) - f^2(-1)}{2}$

Γ) Αν $f(0) = 1$ να βρείτε τη συνάρτηση f .

ΛΥΣΗ

A) α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x)f(-x) = 1$ (1)

Η f έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(-x) > 0$, άρα από (1)

έχουμε $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \xrightarrow{f \uparrow} f(-x_1) > f(-x_2) \xrightarrow[\text{ΜΕΛΗ}]{\text{ΘΕΤΙΚΑ}} \frac{1}{f(-x_1)} < \frac{1}{f(-x_2)} \Leftrightarrow f'(x_1) < f'(x_2)$$

Άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Στο (β) ερώτημα δείξαμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ είναι:

$$f(-x_1) > f(-x_2) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

οπότε η $g(x) = f(-x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B) Θέτουμε $-x = u \Leftrightarrow x = -u$, οπότε $dx = -du$. Όταν $x = 0$ το $u = 0$ και όταν $x = 1$ το $u = -1$.

$$\text{Έχουμε } \int_0^1 \frac{f(-x)}{f(x)} dx = - \int_0^{-1} \frac{f(u)}{f(-u)} du = - \int_0^{-1} f(u) \cdot f'(u) du = - \left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_0^{-1} = \frac{f^2(0) - f^2(-1)}{2}$$

Γ) Η (1) ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα θα ισχύει και για $-x \in \mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$f'(-x) \cdot f(x) = 1 \Leftrightarrow -f'(-x) \cdot f(x) = -1 \Leftrightarrow [f(-x)]' \cdot f(x) = -1 \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

$$f'(x) \cdot f(-x) + [f(-x)]' \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x) \cdot f(-x)]' = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot f(-x) = c_1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) \cdot f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1$. Άρα $f(x) \cdot f(-x) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3)$

Από (1) και (3) για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) \cdot f(-x) = f(x) \cdot f(-x)^{f(-x) > 0} \Leftrightarrow f'(x) = f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - e^{-x}f(x) = 0 \Leftrightarrow (f(x) \cdot e^{-x})' = 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot e^{-x} = c_2$$

Για $x = 0$ είναι $f(0) \cdot e^0 = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1$. Επομένως $f(x) \cdot e^{-x} = 1 \Leftrightarrow f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 8ο (18ο – 2008)

A) Να αποδείξετε ότι $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 2$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $(f'(x) - f(x))e^x = (x-1)f'(x) - f(x)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $e^{e^k - e^\lambda} < e^{k-\lambda}$ για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{N}$ με $k < \lambda$.

γ) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς A, B έτσι, ώστε

$$x - 2 = A \cdot f'(x) + B \cdot f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{x-2}{e^x - x + 1}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

ΛΥΣΗ

A) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x) = e^x - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $h'(x) = e^x - 1$

$$\text{Είναι } h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης h είναι

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$		2	

ελάχιστο

$$h(0) = 2$$

Η h παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$ με ελάχιστη τιμή $h(0) = 2$, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$h(x) \geq h(0) \Leftrightarrow h(x) \geq 2, \text{ άρα } h(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - x + 1 > 0$$

B) α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f'(x) - f(x))e^x = (x-1)f'(x) - f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f'(x)e^x - f(x)e^x - x \cdot f'(x) + f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) \cdot (e^x - x + 1) - f(x) \cdot (e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot (e^x - x + 1) - f(x) \cdot (e^x - x + 1)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot (e^x - x + 1) - f(x) \cdot (e^x - x + 1)'}{(e^x - x + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x - x + 1} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x - x + 1} = c \Leftrightarrow f(x) = c \cdot (e^x - x + 1).$$

Για $x=0$ είναι $f(0) = c \cdot (e^0 - 0 + 1) \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $f(x) = e^x - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Η $f(x) = e^x - x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ (βλέπε (A) ερώτημα), άρα για κάθε $k, \lambda \in \mathbb{N}$ με $k < \lambda$ ισχύει

$$f(k) < f(\lambda) \Leftrightarrow e^k - k + 1 < e^\lambda - \lambda + 1 \Leftrightarrow e^k - k < e^\lambda - \lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{e^k - k} < e^{e^\lambda - \lambda} \Leftrightarrow \frac{e^{e^k}}{e^k} < \frac{e^{e^\lambda}}{e^\lambda} \Leftrightarrow \frac{e^{e^k}}{e^{e^\lambda}} < \frac{e^k}{e^\lambda} \Leftrightarrow e^{e^k - e^\lambda} < e^{k - \lambda}$$

γ) Αναζητούμε $A, B \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $x - 2 = A \cdot f'(x) + B \cdot f(x) \Leftrightarrow$

$$x - 2 = A \cdot (e^x - 1) + B \cdot (e^x - x + 1) \Leftrightarrow x - 2 = (A + B)e^x - Bx + B - A$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε θα ισχύει και για συγκεκριμένες τιμές του x .

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχουμε } 0 - 2 = (A + B)e^0 - B \cdot 0 + B - A \Leftrightarrow -2 = A + B + B - A \Leftrightarrow 2B = -2 \Leftrightarrow B = -1$$

$$\text{Για } x = 1 \text{ έχουμε } 1 - 2 = (A + B)e^1 - B \cdot 1 + B - A \Leftrightarrow -1 = (A + B)e - B + B - A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 = (A - 1)e - A \Leftrightarrow (A - 1)(e - 1) = 0 \Leftrightarrow A = 1$$

δ) Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$ είναι:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= -\int_0^1 g(x) dx = -\int_0^1 \frac{x-2}{e^x-x+1} dx = -\int_0^1 \frac{(e^x-1)-(e^x-x+1)}{e^x-x+1} dx = \\ &= -\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x-x+1} dx + \int_0^1 \frac{e^x-x+1}{e^x-x+1} dx = -\int_0^1 \frac{(e^x-x+1)'}{e^x-x+1} dx + \int_0^1 1 dx = \\ &= -\left[\ln(e^x-x+1) \right]_0^1 + 1(1-0) = -(\ln e - \ln 2) + 1 = \ln 2 \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 9ο (19ο - 2008)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $x > 0$.

i) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$

ii) Έστω η συνάρτηση g με $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$, $x > 0$ και $g(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 g(x) dx$.

ΛΥΣΗ

i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \right) \stackrel{u = \frac{1}{x}}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow +\infty \\ x \rightarrow 0^+}} \left(u^2 e^{-u} \right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{e^u} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{e^u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(u^2)'}{(e^u)'} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2u}{e^u} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{(2u)'}{(e^u)'} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^u} = 0$$

ii) α) Για να είναι η g συνεχής στο $[0,1]$ πρέπει και αρκεί να είναι συνεχής στο $(0,1)$ και επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1)$$

Η g είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{1}\right) e^{-1} = g(1)$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0 = g(0),$

γιατί $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{u = \frac{1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty}} e^u = +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$, άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[0,1]$.

β) 1ος τρόπος

Η συνάρτηση $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα και η αρχική της στο $[0,1]$

είναι συνεχής και παραγωγίσιμη:

$$G(x) = \begin{cases} x e^{-\frac{1}{x}}, & 0 < x \leq 1 \\ c, & x = 0 \end{cases} \quad \text{με} \quad c = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x e^{-\frac{1}{x}} \right) = 0, \quad \text{άρα} \quad c = 0$$

$$\text{Επομένως} \quad I = \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 G'(x) dx = [G(x)]_0^1 = G(1) - G(0) = \frac{1}{e} - 0 = \frac{1}{e}$$

2ος τρόπος

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} dx = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\int_x^1 e^{-\frac{1}{t}} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\int_x^1 (t)' \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\left[t \cdot e^{-\frac{1}{t}} \right]_x^1 - \int_x^1 t \cdot \left(e^{-\frac{1}{t}} \right)' dt + \int_x^1 \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[e^{-1} - x e^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \cancel{t} \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt + \int_x^1 \frac{1}{t} \cdot e^{-\frac{1}{t}} dt \right] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{e} - x e^{-\frac{1}{x}} \right) = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \cdot \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} \right) = 0$, αφού $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 0$.

ΘΕΜΑ 10ο (23ο – 2008)

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = g(0) = 1$, οι οποίες για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ ικανοποιούν τις σχέσεις $2f'(x) + f^2(x) \cdot g(x) = 2g'(x) + g^2(x) \cdot f(x) = 0$ (1), $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = g(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = a$, $x = a + 1$ όπου $a > 0$, καθώς και το όριο $\lim_{a \rightarrow +\infty} E(a)$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \alpha) \text{ Από (1) έχουμε } 2f'(x) + f^2(x) \cdot g(x) &= 0 \stackrel{g(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} 2f'(x) \cdot g(x) + f^2(x) \cdot g^2(x) = 0 \quad (2) \text{ και} \\ 2g'(x) + g^2(x) \cdot f(x) &= 0 \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} 2g'(x) \cdot f(x) + f^2(x) \cdot g^2(x) = 0 \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Από (2), (3) έχουμε } 2f'(x) \cdot g(x) + \cancel{f^2(x) \cdot g^2(x)} &= 2g'(x) \cdot f(x) + \cancel{f^2(x) \cdot g^2(x)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) &= g'(x) \cdot f(x) \Leftrightarrow f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x) = 0 \stackrel{g(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} &= 0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = c, \quad x \in (-1, +\infty). \end{aligned}$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } \frac{f(0)}{g(0)} = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{1} = 1, \text{ άρα } \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow f(x) = g(x), \quad x \in (-1, +\infty).$$

Οι f, g είναι συνεχείς στο $(-1, +\infty)$, $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$. Άρα οι f, g διατηρούν σταθερό πρόσημο και επειδή $f(0) = g(0) = 1 > 0$ έχουμε $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$.

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Είναι } 2f'(x) + f^2(x) \cdot g(x) &= 0 \stackrel{f(x)=g(x)}{\Leftrightarrow} 2f'(x) + f^3(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) = -f^3(x) \stackrel{f(x) \neq 0}{\Leftrightarrow} \\ \Leftrightarrow -\frac{2f'(x)}{f^3(x)} &= 1 \Leftrightarrow -2f^{-3}(x)f'(x) = 1 \Leftrightarrow (f^{-2}(x))' = (x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)} = x + c \end{aligned}$$

$$\text{Για } x = 0 \text{ έχουμε } \frac{1}{f^2(0)} = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Άρα για κάθε } x \in (-1, +\infty) \text{ είναι } f^2(x) = \frac{1}{x+1} \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

γ) Για κάθε $x \in (-1, +\infty)$ είναι

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)' = \frac{-(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x+1})^2} = -\frac{(x+1)'}{2(\sqrt{x+1})(x+1)} = -\frac{1}{2(\sqrt{x+1})(x+1)} < 0$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, +\infty)$.

Για $x \in (-1, +\infty)$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$, διότι για $x > -1$ είναι $\sqrt{x+1} > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x+1} = 0$. Άρα η $x = -1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$$\text{Για } x \in (0, +\infty) \text{ είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{x} \right) = 0 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0 = \beta \in \mathbb{R}$$

Άρα η ευθεία $y = 0x + 0 = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

$$\delta) E(\alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha+1} |f(x)| dx = \int_{\alpha}^{\alpha+1} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \left[2\sqrt{x+1} \right]_{\alpha}^{\alpha+1} = 2\sqrt{\alpha+2} - 2\sqrt{\alpha+1}$$

$$\text{Άρα } \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} 2[\sqrt{\alpha+2} - \sqrt{\alpha+1}] = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2(\sqrt{\alpha+2} - \sqrt{\alpha+1})(\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1})}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2[(\sqrt{\alpha+2})^2 - (\sqrt{\alpha+1})^2]}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2(\alpha+2 - \alpha - 1)}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\alpha+2} + \sqrt{\alpha+1}} = 0.$$

ΘΕΜΑ 11ο (24ο – 2008)

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για $x \in \mathbb{R}^*$ η οποία είναι «1-1» και έχει την ιδιότητα:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)} \quad \text{για κάθε } x \neq 0$$

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $f(f(x)) = \frac{1}{x}$ και $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ για κάθε $x \neq 0$

β) Να αποδείξετε ότι $f(1) = -1$ και $f(-1) = 1$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = x$ είναι αδύνατη.

δ) Αν η f είναι συνεχής, τότε να αποδείξετε ότι:

i) $f(x) < 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x < 0$

ii) Η f δεν μπορεί να είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \neq 0$ (1)

Στη σχέση (1) θέτουμε όπου x το $f(x) \neq 0$ και έχουμε:

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f(f(x))} \Leftrightarrow x = \frac{1}{f(f(x))} \Leftrightarrow f(f(x)) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0 \quad (2)$$

Στη σχέση (2) θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x} \neq 0$ και έχουμε:

$$f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x, \quad \text{άρα και } f^{-1}\left(f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = f^{-1}(x)f(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{για κάθε } x \neq 0 \quad (3)$$

β) Από τη σχέση (3) για $x=1$ έχουμε $f(1)f(1)=1 \Leftrightarrow f^2(1)=1 \Leftrightarrow f(1)=1$ ή $f(1)=-1$

Έστω ότι $f(1)=1$, τότε $f^{-1}(1)=\frac{1}{f(1)}=1 \Leftrightarrow f^{-1}(1)=1$, όμως η f είναι γνησίως αύξουσα

στο $(0, +\infty)$, άρα για $x > 1 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} < 1 \Leftrightarrow f^{-1}(x) < 1$ άτοπο, αφού

$f^{-1}(1)=1$. Άρα $f(1)=-1$

Από τη σχέση (3) για $x=-1$ έχουμε $f(f(-1))=-1 \stackrel{(\beta)}{\Leftrightarrow} f(f(-1))=f(1) \stackrel{f:1 \rightarrow -1}{\Leftrightarrow} f(-1)=1$
ερώτημα

γ) Για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{x} \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{x}, \text{ άρα } x=\frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ή } x=1$$

Όμως για $x=1$ έχουμε $f(1)=1$ άτοπο, αφού $f(1)=-1$ και για $x=-1$ έχουμε $f(-1)=-1$ άτοπο, αφού $f(-1)=1$. Άρα η εξίσωση $f^{-1}(x)=x$ είναι αδύνατη.

δ) i) Η f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(0, +\infty)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(1)=-1 < 0$, οπότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και δε μηδενίζεται στο $(-\infty, 0)$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Είναι $f(-1)=1 > 0$, οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

ii) Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$, τότε για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ με $x_1 < x_2$ θα

$$\text{ισχύει } f(x_1) < f(x_2) \stackrel{(i)}{\Leftrightarrow} \frac{1}{f^{-1}(x_1)} < \frac{1}{f^{-1}(x_2)} \Leftrightarrow f^{-1}(x_1) > f^{-1}(x_2) \text{ άτοπο, αφού } f^{-1}(x_1), f^{-1}(x_2)$$

είναι ομόσημοι και f^{-1} διατηρεί τη μονοτονία της f .

ΘΕΜΑ 12ο (25ο – 2008)

Δίνονται:

- Η ευθεία (ε): $y = x - e$
- Η συνάρτηση $g(x) = x \ln x - x$ και
- Μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f'(\ln x) = x \ln x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Να αποδείξετε ότι:

α) Η ευθεία (ε) εφάπτεται της C_g .

β) i) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$ τότε ισχύει $f(x) = g(e^x)$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Για κάθε $x \in (0, 1)$, ισχύει $-1 < f(x) < xe - 1$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $g'(x) = \ln x$.

Η ευθεία (ε): $y = x - e$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης g , αν και μόνο αν,

$$\text{υπάρχει σημείο } M(x_0, g(x_0)) \text{ τέτοιο, ώστε } \begin{cases} g(x_0) = x_0 - e \\ g'(x_0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 \ln x_0 - x_0 = x_0 - e \\ \ln x_0 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = e$$

Έχουμε λοιπόν $\begin{cases} g(e) = 0 \\ g'(e) = 1 \end{cases}$, συνεπώς η ευθεία (ε): $y = x - e$ εφάπτεται της C_g στο σημείο $M(e, 0)$.

β) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε: $f'(\ln x) = x \ln x \Leftrightarrow f'(\ln x) \cdot \frac{1}{x} = \ln x \Leftrightarrow$

$$[f(\ln x)]' = (x \ln x - x)' , \text{ άρα: } f(\ln x) = x \ln x - x + c . \text{ Για } x = 1 \text{ έχουμε } f(0) = 0 - 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

$$\text{Άρα } f(\ln x) = x \ln x - x \Leftrightarrow f(\ln x) = g(x).$$

$$\text{Αν θέσουμε όπου } x \text{ το } e^x \text{ έχουμε } g(e^x) = f(\ln e^x) \Leftrightarrow f(x) = g(e^x).$$

ii) Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε διάστημα $[0, x]$, $0 < x < 1$ με $f'(x) = xe^x$. Ισχύει λοιπόν

$$\text{το Θ.Μ.Τ. άρα θα υπάρξει } \xi \in (0, x) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow \xi e^\xi = \frac{f(x) + 1}{x} \quad (1)$$

Είναι $0 < \xi < x < 1 \Leftrightarrow e^0 < e^\xi < e^x < e^1 \Leftrightarrow 1 < e^\xi < e^x < e$ άρα $1 < e^\xi < e$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{cases} 0 < \xi < 1 \\ 1 < e^\xi < e \end{cases} \text{ άρα } 0 < \xi e^\xi < e \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{f(x) + 1}{x} < e \Leftrightarrow -1 < f(x) < xe - 1$$

ΘΕΜΑ 13ο (27ο – 2008)

Έστω συνάρτηση $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με πρώτη παράγωγο γνησίως φθίνουσα και συνεχή. Αν $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ και για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $f(x) \geq 0$ και $f'(x) \neq 0$ να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

β) Η εξίσωση $f'(x) = f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

$$\gamma) \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x) + 1} < \frac{f(1)}{f'(1)}$$

ΛΥΣΗ

α) Η f' είναι συνεχής και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα η $f'(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $f'(0) > 0$ συμπεραίνουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$, άρα ισχύει Θ.Μ.Τ. οπότε θα υπάρξει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$

$$\text{τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = f(1) \quad (1).$$

Άρα η εξίσωση $f'(x) = f(1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

$$\gamma) \text{ Για } \xi < 1 \stackrel{f' \downarrow}{\Leftrightarrow} f'(\xi) > f'(1) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(1) > f'(1) \stackrel{f'(1) > 0}{\Leftrightarrow} \frac{f(1)}{f'(1)} > 1$$

$$\text{Αρκεί να αποδείξουμε ότι } \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x) + 1} \leq 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{f^2(x) + 1} \leq \int_0^1 1 dx \Leftrightarrow \int_0^1 \left(\frac{1}{f^2(x) + 1} - 1 \right) dx \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow - \int_0^1 \frac{f^2(x)}{f^2(x) + 1} dx \leq 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \frac{f^2(x)}{f^2(x) + 1} dx \geq 0, \text{ το οποίο ισχύει.}$$

ΘΕΜΑ 14ο (31ο – 2008)

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f^3(x) + 3f(x) = x^5 + x + 1$ (1)
για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- β) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $\rho \in (-1, 0)$.
- γ) Η f αντιστρέφεται.
- δ) Το σημείο $N(0, \rho) \in C_{f^{-1}}$.
- ε) Η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Υπόδειξη

Θεωρείται γνωστό ότι:

$$\text{αν } f \nearrow \text{ στο } A, \text{ τότε } f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x, \quad x \in B = A \cap f(A)$$

ΛΥΣΗ

- α) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και η f^3 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης η συνάρτηση $x^5 + x + 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της (1) και έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + 3f'(x) = 5x^4 + 1 \Leftrightarrow$$

$$3(f^2(x) + 1)f'(x) = 5x^4 + 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{5x^4 + 1}{3(f^2(x) + 1)} > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f(x)(f^2(x) + 3) = x^5 + x + 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x^5 + x + 1}{f^2(x) + 3} \quad (2)$$

Είναι:

$$f(0) = \frac{1}{f^2(0) + 3} > 0 \quad \text{και} \quad f(-1) = \frac{-1}{f^2(-1) + 3} < 0.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ και $f(-1)f(0) < 0$.

Ισχύουν λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ρίζα στο $(-1, 0)$ και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

- γ) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και "1-1", άρα αντιστρέφεται.

- δ) Αφού ρ ρίζα της $f(x) = 0$ ισχύει $f(\rho) = 0 \Leftrightarrow M(\rho, 0) \in C_f \Leftrightarrow N(0, \rho) \in C_{f^{-1}}$.

- ε) Η f είναι $\nearrow$ στο $\mathbb{R}$, άρα ισχύει η ισοδυναμία $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned} f^3(x) + 3f(x) &= x^5 + x + 1 \Leftrightarrow \\ f^3(x) - x^3 + 3f(x) - 3x &= x^5 + x + 1 - x^3 - 3x \Leftrightarrow \\ [f(x) - x] \cdot [f^2(x) + xf(x) + x^2 + 3] &= x^5 - x^3 - 2x + 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Είναι γνωστό ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f^2(x) + xf(x) + x^2 \geq 0 \Leftrightarrow f^2(x) + xf(x) + x^2 + 3 \geq 3$.

Αρκεί λοιπόν η συνάρτηση $g(x) = x^5 - x^3 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$, να έχει ρίζα στο $(0, 1)$.

Παρατηρούμε ότι:

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, 1]$.
- $g(0)g(1) = 1 \cdot (-1) < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θ. Bolzano, οπότε η $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 15ο (32ο – 2008)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{a}(x+a)e^{a-x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $a > 0$

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και τα σημεία καμψής.

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $a > 0$ οι γραφικές παραστάσεις των f και f' έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

δ) Η ευθεία $x=1$ ορίζει με τις γραφικές παραστάσεις των f και f' ένα ευθύγραμμο τμήμα. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε το τμήμα αυτό να έχει το μικρότερο δυνατό μήκος.

ε) Η γραφική παράσταση της f για $a=1$, ο άξονας $x'x$ και η ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda > -1$ ορίζουν ένα χωρίο με εμβαδόν $E(\lambda)$. Να βρείτε το $E(\lambda)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

ΛΥΣΗ

α)

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
- Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, η f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.
- Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+a}{e^{x-a}} = \frac{1}{a} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-a}} = 0$, οπότε η ευθεία $y=0$, δηλαδή ο άξονας $x'x$, είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x) = \frac{1}{a}e^{a-x} - \frac{1}{a}(x+a)e^{a-x} = \left(\frac{1}{a} - \frac{x}{a} - 1\right)e^{a-x}$$

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f''(x) = \left(\frac{x}{a} + 1 - \frac{2}{a}\right)e^{a-x}$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 - \alpha$ και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1 - \alpha$
- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 - \alpha$ και $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 2 - \alpha$

Οπότε ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο παρακάτω:

x	$-\infty$	$1 - \alpha$	$2 - \alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f''(x)$	-	-	0	+
$f(x)$				

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη στο $(-\infty, 1 - \alpha]$, γνησίως φθίνουσα και κοίλη στο $[1 - \alpha, 2 - \alpha]$, γνησίως φθίνουσα και κυρτή στο $[2 - \alpha, +\infty)$. Η f έχει μοναδικό μέγιστο

για $x = 1 - \alpha$ το $f(1 - \alpha) = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{2\alpha-1}$ και μοναδικό σημείο καμπής το $K\left(2 - \alpha, \frac{2}{\alpha} e^{2\alpha-2}\right)$

γ) Έχουμε $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha} + 1 = \frac{1}{\alpha} - \frac{x}{\alpha} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \alpha$, που σημαίνει ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f' έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

δ) Έστω $d(\alpha)$ το μήκος του τμήματος, τότε:

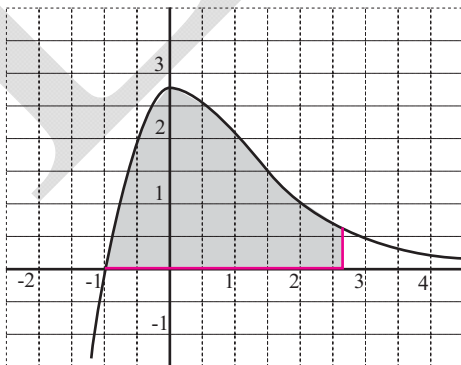
$$d(\alpha) = |f(1) - f'(1)| = \left(\frac{1}{\alpha} + 2\right) e^{\alpha-1} \quad \text{και} \quad d'(\alpha) = d'(\alpha) = \left(-\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} + 2\right) e^{\alpha-1}$$

Επομένως $d'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$ και $d'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{2}$.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Άρα για $\alpha = \frac{1}{2}$ το d έχει ελάχιστο μήκος.

$$\varepsilon) \quad E(\lambda) = \int_{-1}^{\lambda} f(x) dx = \int_{-1}^{\lambda} (x+1)e^{x-1} dx = \left[(x+1)(-e^{1-x}) \right]_{-1}^{\lambda} - \int_{-1}^{\lambda} (-e^{1-x}) dx = e^2 - (\lambda+2)e^{1-\lambda}$$



$$\text{και} \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) = e^2 - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda+2}{e^{\lambda-1}} = e^2$$