

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2010
ΕΠΙΚΑΙΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΥΛΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο (7ο – 2010):

Έστω συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0)=2$ η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + 4f(x) = 6 - x^4$ (1).

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.

β) Να αποδείξετε ότι $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 0$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 4f(x) - 5}{x - 1} = -4$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x))$.

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x)) + 1 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

ΛΥΣΗ

α) Για $x = 0$ από την (1) έχουμε: $f(f(0)) + 4f(0) = 6 \Rightarrow f(2) + 4 \cdot 2 = 6 \Rightarrow f(2) = -2$.

Για $x = 2$ από την (1) έχουμε: $f(f(2)) + 4f(2) = 6 - 2^4 \Rightarrow f(-2) + 4 \cdot (-2) = 6 - 16 \Rightarrow f(-2) = -2$.

β) Είναι $f(-2) = -2 < 0 < 2 = f(0)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-2, 0]$, επομένως από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2, 0)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Για $x = x_0$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_0)) + 4f(x_0) = 6 - x_0^4 \Rightarrow f(0) + 4 \cdot 0 = 6 - x_0^4 \Rightarrow 2 = 6 - x_0^4 \Rightarrow x_0^4 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 = \sqrt{2} \text{ ή } x_0 = -\sqrt{2} \Rightarrow x_0 = -\sqrt{2}, \text{ αφού } x_0 \in (-2, 0). \text{ Άρα } f(-\sqrt{2}) = 0.$$

Είναι $f(2) = -2 < 0 < 2 = f(0)$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2]$, επομένως από το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Για $x = x_1$ από την (1) έχουμε:

$$f(f(x_1)) + 4f(x_1) = 6 - x_1^4 \Rightarrow f(0) + 4 \cdot 0 = 6 - x_1^4 \Rightarrow 2 = 6 - x_1^4 \Rightarrow x_1^4 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{2} \text{ ή } x_1 = -\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = \sqrt{2}, \text{ αφού } x_1 \in (0, 2). \text{ Άρα } f(\sqrt{2}) = 0.$$

γ) Για $x \neq 1$, θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{x^4 + 4f(x) - 5}{x - 1}$, οπότε $f(x) = \frac{(x-1)g(x) - x^4 + 5}{4}$ (2)

Από υπόθεση είναι $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -4$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)g(x) - x^4 + 5}{4} = 1$, και

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)) \stackrel{u=f(x)}{=} \lim_{u \rightarrow 1} f(u) = 1.$$

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(f(x)) + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-\sqrt{2}, 0]$ και $[0, \sqrt{2}]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, της $f(f(x))$ που είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών και της σταθερής συνάρτησης 1.

Είναι:

- $g(-\sqrt{2}) = f(f(-\sqrt{2})) + 1 = f(0) + 1 = 2 + 1 = 3.$
- $g(0) = f(f(0)) + 1 = f(2) + 1 = -2 + 1 = -1.$
- $g(\sqrt{2}) = f(f(\sqrt{2})) + 1 = f(0) + 1 = 2 + 1 = 3.$

Επομένως $g(-\sqrt{2}) \cdot g(0) = -3 < 0$ και $g(0) \cdot g(\sqrt{2}) = -3 < 0$.

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano σε δύο διαστήματα, άρα η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(f(x)) + 1 = 0$ θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-\sqrt{2}, 0)$ και μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \sqrt{2})$, δηλαδή δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

ΘΕΜΑ 2ο (8ο – 2010)

Δίνεται η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{f(x+1)} = 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $y = x - 1$ σε ένα ακριβώς σημείο (x_0, y_0) με $x_0 \in (0, 1)$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{f(x+1)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{f(u)} = 1$ (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(u) = \frac{u}{f(u)}$, για u κοντά στο 0, οπότε $g(u) \cdot f(u) = u$ και από (1)

έχουμε $\lim_{u \rightarrow 0} g(u) = 1$ (2).

Είναι $\lim_{u \rightarrow 0} [g(u) \cdot f(u)] = \lim_{u \rightarrow 0} u \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} g(u) \cdot \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0 \Leftrightarrow \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0$ και αφού η f είναι συνεχής

ισχύει $f(0) = 0$, δηλαδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Για x κοντά στο 0 είναι:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x}$$

Έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{u}{f(u)}} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{1} = 1.$$

Επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Είναι $h(0) = f(0) - 0 + 1 \stackrel{(a)}{=} 1 > 0$ και $h(1) = f(1) - 1 + 1 = f(1) < 0$, γιατί η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση, οπότε $1 > 0 \Leftrightarrow f(1) < f(0) = 0$. Άρα $h(0)h(1) < 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Bolzano, άρα η εξίσωση $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x - 1$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.

Για $x_1, x_2 \in (0, 1)$ με $x_1 < x_2$ ισχύουν:

$$f(x_1) > f(x_2) \quad \text{και} \quad -x_1 + 1 > -x_2 + 1,$$

οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$f(x_1) - x_1 + 1 > f(x_2) - x_2 + 1 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2).$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$, οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μία ακριβώς ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.

ΘΕΜΑ 3ο (9ο – 2010)

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) = x^6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

γ) Αν $f(-2) > 0$ και $f(2) < 0$, να αποδείξετε ότι $f(x) = -x^3$.

δ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

ε) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^6 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μοναδική ρίζα την $x = 0$.

β) Η συνάρτηση f στο $(-\infty, 0)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Η συνάρτηση f στο $(0, +\infty)$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται, οπότε σε αυτό το διάστημα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

γ) Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-\infty, 0)$ και από υπόθεση είναι $f(-2) > 0$, οπότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x) = x^6 \Leftrightarrow f(x) = -x^3, \text{ αφού } x < 0.$$

Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in (-\infty, 0] \quad (1).$$

Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$ και από υπόθεση είναι $f(2) < 0$, οπότε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Επομένως στο διάστημα αυτό έχουμε:

$$f^2(x) = x^6 \Leftrightarrow f(x) = -x^3, \text{ αφού } x > 0.$$

Επειδή $f(0) = 0$ έχουμε τελικά:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty) \quad (2).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις (1) και (2) έχουμε:

$$f(x) = -x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

δ) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε διαδοχικά:

$$-x_1^3 = -x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι «1-1» στο $\mathbb{R}$, οπότε αντιστρέφεται.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} , λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x .

Έχουμε:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = -x^3 \Leftrightarrow (-x)^3 = y \Leftrightarrow -x = \begin{cases} -\sqrt[3]{-y}, & y < 0 \\ \sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{-y}, & y < 0 \\ -\sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \end{cases}.$$

Επειδή ισχύει η ισοδυναμία $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ έχουμε $f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{-y}, & y < 0 \\ -\sqrt[3]{y}, & y \geq 0 \end{cases}.$

Επομένως:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{-x}, & x < 0 \\ -\sqrt[3]{x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

ε) Λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \stackrel{f, f^{-1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = f(f^{-1}(x)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x = -y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x + y = -x^3 - y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x^3 + y^3 + x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ (x+y) \underbrace{(x^2 - xy + y^2 + 1)}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^3 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = -x^3 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1)(x-1) = 0 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ή } x = 0 \text{ ή } x = 1 \\ y = -x \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (-1, 1) \text{ ή } (0, 0) \text{ ή } (1, -1).
 \end{aligned}$$

Άρα τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι τα:

$$A(-1, 1), \quad O(0, 0) \quad \text{και} \quad B(1, -1).$$

ΘΕΜΑ 4ο (10ο – 2010)

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$(1) \quad f^2(x) + \eta \mu^2 x = 2x f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\ell = 1$

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta \mu x)}{x^2 - x}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

δ) Να βρείτε όλους τους δυνατούς τύπους της συνάρτησης f .

ΛΥΣΗ

α) i) Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) με $x^2 \neq 0$ έχουμε

$$\left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 + \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 = 2 \frac{f(x)}{x} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^* \quad (3).$$

Από τη σχέση (2) έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$. Αν πάρουμε τα όρια και των δύο μελών

στη σχέση (3) έχουμε:

$$\ell^2 + 1 = 2\ell \Leftrightarrow \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 1, \quad \text{δηλαδή} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 \quad (4).$$

β) Για x κοντά στο $x_0 = 0$ έχουμε:

$$\frac{f(\eta\mu x)}{x^2 - x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x^2 - x} = \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{x-1}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \stackrel{u=\eta\mu x}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} \stackrel{(4)}{=} 1$ (5), οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} \stackrel{(5)}{=} 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow (f(x) - x)^2 = x^2 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow g^2(x) = x^2 - \eta\mu^2 x \quad (6).$$

$$\text{Αν ισχύει } g(x) = 0 \Leftrightarrow g^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = x^2 \Leftrightarrow |\eta\mu x| = |x| \Leftrightarrow x = 0.$$

Θυμίζουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\eta\mu x| \leq |x|$ και ότι η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα για $x \neq 0$ έχουμε $|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x < x^2 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$

Η συνάρτηση λοιπόν $g(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και δε μηδενίζεται στο $\mathbb{R}^*$, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

δ) Διακρίνουμε περιπτώσεις:

♦ Στο διάστημα $(-\infty, 0)$ έχουμε:

• Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (I).$$

• Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (II).$$

♦ Στο διάστημα $(0, +\infty)$ έχουμε:

• Αν $g(x) < 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = -\sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (III).$$

• Αν $g(x) > 0$, τότε από τη σχέση (6) έχουμε

$$g(x) = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) - x = \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \Leftrightarrow f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} \quad (IV).$$

Συνδυάζοντας τις περιπτώσεις:

➤ (I) και (III) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$.

➤ (I) και (IV) και επειδή $f(0) = 0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} & , x < 0 \\ x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} & , x \geq 0 \end{cases}$.

- (II) και (III) και επειδή $f(0)=0$ έχουμε $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} & , x < 0 \\ x - \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x} & , x \geq 0 \end{cases}$.
- (II) και (IV) και επειδή $f(0)=0$ έχουμε $f(x) = x + \sqrt{x^2 - \eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 5ο (13ο – 2010)

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, e) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ η οποία για κάθε $x \in (0, e)$ ικανοποιεί τη σχέση $\ln(f'(x)) = f(x) - \ln x$.

A. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

B. Αν $f(x) = -\ln(1 - \ln x)$, $x \in (0, e)$.

- α) Να δικαιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e)$.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.
- δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1 - \ln x = \frac{1}{e^a}$, για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

A. Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$\begin{aligned} \ln(f'(x)) = f(x) - \ln x &\Leftrightarrow f'(x) = e^{f(x) - \ln x} \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{e^{f(x)}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{-f(x)} &= \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(-e^{-f(x)}\right)' = (\ln x)' \Leftrightarrow -e^{-f(x)} = \ln x + c. \end{aligned}$$

Είναι $f(1) = 0$, οπότε $-e^0 = \ln 1 + c \Leftrightarrow c = -1$.

Επομένως έχουμε:

$$-e^{-f(x)} = \ln x - 1 \Leftrightarrow e^{-f(x)} = 1 - \ln x \Leftrightarrow -f(x) = \ln(1 - \ln x) \Leftrightarrow f(x) = -\ln(1 - \ln x), \quad x \in (0, e).$$

B. α) Στο διάστημα $(0, e)$ από υπόθεση ορίζεται η $\ln(f'(x))$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, e)$.

Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) \right)$.

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\ln(1 - \ln x) \right) \stackrel{1 - \ln x = t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} (-\ln t) = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \left(-\ln(1 - \ln x) \right) \stackrel{1 - \ln x = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} (-\ln t) = +\infty.$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = \mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x(1-\ln x)} \right)' = \frac{-[x(1-\ln x)]'}{[x(1-\ln x)]^2} = \frac{-(1-\ln x)+1}{x^2(1-\ln x)^2} = \frac{\ln x}{x^2(1-\ln x)^2}$$

Το πρόσημο της f'' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f' , φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	0	1	e
f''		- 0 +	
f'		↘ 1 ↗	

ελάχ.

Έχουμε:

- Η f' είναι συνεχής στο $(0, 1]$ και $f''(x) < 0$ στο $(0, 1)$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$.
- Η f' είναι συνεχής στο $[1, e)$ και $f''(x) > 0$ στο $(1, e)$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, e)$.
- Η f' παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=1$, με ελάχιστη τιμή $f'(1)=1$.
Άρα ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος, όταν $x=1$.

δ) Για κάθε $x \in (0, e)$ είναι:

$$1 - \ln x = \frac{1}{e^a} \Leftrightarrow \ln(1 - \ln x) = -a \Leftrightarrow -\ln(1 - \ln x) = a \Leftrightarrow f(x) = a.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, e)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $f((0, e)) = \mathbb{R}$.
Άρα για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = a$ έχει μοναδική λύση.

ΘΕΜΑ 6ο (14ο – 2010)

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f'(x) - f(x) = xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}, 1\right)$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = e^{-x} - 2$ έχει ακριβώς μία πραγματική λύση.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: (3e-2)x - 2y + 6 = 0$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) - f(x) = xe^x \Leftrightarrow e^x f'(x) - e^x f(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow \frac{e^x f'(x) - e^x f(x)}{e^{2x}} = x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x} \right)' = \left(\frac{x^2}{2} \right)' . \text{ Άρα } \frac{f(x)}{e^x} = \frac{x^2}{2} + c, \quad x \in \mathbb{R} .$$

$$\text{Είναι } f(0) = 1 \text{ άρα } c = 1, \text{ επομένως } f(x) = e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right), \quad x \in \mathbb{R} .$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = \left[e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) \right]' = e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) + e^x x = e^x \left(\frac{x^2}{2} + x + 1 \right) = \frac{1}{2} (x^2 + 2x + 2) e^x > 0 ,$$

επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$f(0) = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(1) = 0 \quad \text{και} \quad f(1) = \frac{3}{2}e \Leftrightarrow f^{-1}\left(\frac{3}{2}e\right) = 1$$

Άρα η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από τα σημεία $A(1, 0)$ και $B\left(\frac{3e}{2}, 1\right)$.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$.

Έχουμε:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2}{2} + 1}{e^{-x}} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-e^{-x}} \stackrel{\frac{-\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 .$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty .$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = (0, +\infty)$.

δ) Η αρχική εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 = e^{-x} - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 = \frac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^x (x^2 + 2) = 1 \Leftrightarrow e^x \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2} .$$

Επειδή το $\frac{1}{2} \in (0, +\infty) = f(A)$ η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2}$, άρα και η ισοδύναμή της εξίσωση

$x^2 = e^{-x} - 2$ έχει μία πραγματική ρίζα, η οποία είναι και μοναδική, γιατί η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- ε) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x + 2)e^x$, άρα ισχύει Θ.Μ.Τ. επομένως θα υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{\frac{3e}{2} - 1}{1 - 0} = \frac{3e}{2} - 1 = \frac{3e - 2}{2}$$

Είναι $\varepsilon: (3e - 2)x - 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3e - 2}{2}x + 3$, άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ε είναι $\lambda_\varepsilon = \frac{3e - 2}{2}$

Παρατηρούμε ότι $f'(x_0) = \lambda_\varepsilon$, οπότε υπάρχει σημείο της C_f με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: (3e - 2)x - 2y + 6 = 0$

ΘΕΜΑ 7ο (15ο – 2010)

- A) Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι "1-1" και συνεχής σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ .**
- B) Έστω συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Αν $f'(2) > 0$, $f^{(3)}(2) > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + f(4 - x) = 3$, τότε:**
- α) Να αποδείξετε ότι η f'' είναι γνησίως μονότονη.**
 - β) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.**
 - γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = 3$ έχει μια ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$.**
 - δ) Αν η γραφική παράσταση C_g της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο M , να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο σημείο M σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .**
- ε) Για $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2f(x + 1) = f(x) + f(x + 2)$ είναι αδύνατη.**

ΛΥΣΗ

- A)** Έστω $x_1, x_2, x_3 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 < x_3$, οπότε αφού η f είναι "1-1" οι τιμές $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ θα είναι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο.
Υποθέτουμε επίσης ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως μονότονη, οπότε δεν θα ισχύει καμία από τις σχέσεις $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3)$ και $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3)$. Δηλαδή το $f(x_2)$ δεν θα βρίσκεται ανάμεσα στο $f(x_1)$ και στο $f(x_3)$.

Επομένως θα ισχύει μία από τις παρακάτω ανισότητες:

$$f(x_1) < f(x_3) < f(x_2) \quad (1) \qquad f(x_2) < f(x_3) < f(x_1) \quad (2)$$

$$f(x_2) < f(x_1) < f(x_3) \quad (3) \qquad f(x_3) < f(x_1) < f(x_2) \quad (4)$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (1), τότε εφόσον το $f(x_3)$ βρίσκεται μεταξύ του $f(x_1)$ και του $f(x_2)$, θα υπάρχει σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = f(x_3)$. Επομένως για $x_1 < \xi < x_2 < x_3$, δηλαδή για $\xi < x_3$ έχουμε $f(\xi) = f(x_3)$ που είναι άτοπο, αφού η f είναι "1-1". Ομοίως θα καταλήξουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε ότι ισχύει μία από τις ανισότητες (2), (3) και (4).

B) α) Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση f'' είναι "1-1".

Αν υποθέσουμε ότι η f'' δεν είναι "1-1", τότε θα υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια, ώστε $f''(x_1) = f''(x_2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$, οπότε έχουμε:

- Η f'' είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x_1, x_2]$, αφού η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
- $f''(x_1) = f''(x_2)$.

Άρα η f'' ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$, που είναι άτοπο, αφού από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f'' είναι "1-1" στο $\mathbb{R}$.

Η συνάρτηση f είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε η f'' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επίσης η f'' είναι "1-1", οπότε σύμφωνα με το (A) ερώτημα η f'' είναι γνησίως μονότονη.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) + f(4-x) = 3$. Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$f'(x) - f'(4-x) = 0 \quad \text{και} \quad f''(x) + f''(4-x) = 0 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Για } x=2 \text{ είναι } f''(2) + f''(4-2) = 0 \Leftrightarrow 2f''(2) = 0 \Leftrightarrow f''(2) = 0 \quad (1).$$

Η f'' είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και επειδή από υπόθεση είναι $f^{(3)}(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ή $f^{(3)}(x) > 0$ ή $f^{(3)}(x) < 0$. Όμως $f^{(3)}(2) > 0$, άρα $f^{(3)}(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\text{Για } x < 2 \text{ είναι } f''(x) < f''(2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x) < 0, \text{ ενώ για } x > 2 \text{ είναι } f''(x) > f''(2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f''(x) > 0.$$

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	-	0	+
f	$\cap$	3/2	$\cup$

Σ. Κ.

Για $x=2$ από την αρχική σχέση έχουμε:

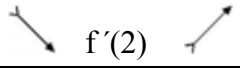
$$f(2) + f(4-2) = 3 \Leftrightarrow 2f(2) = 3 \Leftrightarrow f(2) = \frac{3}{2} \quad (2).$$

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 2]$ και $f''(x) < 0$ στο $(-\infty, 2)$, άρα η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και $f''(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$, άρα η f κυρτή στο $[2, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 2$ και το σημείο καμπής είναι το $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

γ) Από τη σχέση (2) συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $2f(x) = 3$ έχει ρίζα τον αριθμό $x = 2$. Θα αποδείξουμε τώρα ότι η παραπάνω ρίζα είναι μοναδική.

Από το (β) ερώτημα έχουμε:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f''	$-$	0	$+$
f'			

ελάχ.

Η συνάρτηση f' παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0 = 2$, άρα $f'(x) \geq f'(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Όμως από υπόθεση είναι $f'(2) > 0$, άρα $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα $x = 2$ είναι μοναδική.

δ) Αν x_0 η τετμημένη του σημείου M , στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$, τότε έχουμε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = 0 \quad (3).$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } g'(x) = \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

$$\text{Άρα } g'(x_0) = \frac{[f'(x_0)]^2 - f(x_0)f''(x_0)}{[f'(x_0)]^2} \stackrel{(3)}{=} \frac{[f'(x_0)]^2}{[f'(x_0)]^2} = 1, \text{ οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της}$$

εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_g , της συνάρτησης g στο σημείο M , στο οποίο η C_g τέμνει τον άξονα $x'x$ είναι $\lambda_\varepsilon = g'(x_0) = 1$, οπότε η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα $x'x$ είναι 45° .

ε) Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται $f(x+1) - f(x) = f(x+2) - f(x+1)$ (4).

Για $x \geq 2$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[x, x+1]$ και $[x+1, x+2]$, άρα θα υπάρχει:

$$\bullet \xi_1 \in (x, x+1) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_1) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) = f'(\xi_1).$$

$$\bullet \xi_2 \in (x+1, x+2) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi_2) = \frac{f(x+2) - f(x+1)}{(x+2) - (x+1)} \Leftrightarrow f(x+2) - f(x+1) = f'(\xi_2)$$

Η εξίσωση (4) ισοδύναμα γράφεται $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ (5). Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$, άρα θα είναι και "1-1", οπότε από (5) έχουμε $\xi_1 = \xi_2$ που είναι αδύνατο, γιατί τα ξ_1, ξ_2 ανήκουν σε διαφορετικά διαστήματα.

Άρα η εξίσωση $2f(x+1) = f(x) + f(x+2)$ είναι αδύνατη, για $x \geq 2$.

ΘΕΜΑ 8ο (16ο – 2010)

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+2010) - f(x))$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \right)' = \frac{(2e^x + x^2)'(e^x + x^2) - (2e^x + x^2)(e^x + x^2)'}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{(2e^x + 2x)(e^x + x^2) - (2e^x + x^2)(e^x + 2x)}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{2e^{2x} + 2x^2e^x + 2xe^x + 2x^3 - 2e^{2x} - 4xe^x - x^2e^x - 2x^3}{(e^x + x^2)^2} = \\ &= \frac{x^2e^x - 2xe^x}{(e^x + x^2)^2} = \frac{(x^2 - 2x)e^x}{(e^x + x^2)^2} = \frac{x(x-2)e^x}{(e^x + x^2)^2}. \end{aligned}$$

Το πρόσημο της f'' καθώς και η κυρτότητα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
f''	+	0	-	0	+
f	$\cup$		$\cap$		$\cup$

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f''(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η f κυρτή στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και $f''(x) < 0$ στο $(0, 2)$, άρα η f κοίλη στο $[0, 2]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[2, +\infty)$ και $f''(x) > 0$ στο $(2, +\infty)$, άρα η f κυρτή στο $[2, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} - 1 = \frac{2e^x + x^2 - e^x - x^2}{e^x + x^2} = \frac{e^x}{e^x + x^2} > 0.$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επίσης η f είναι συνεχής, οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$.

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$g(x) < g(0) \Leftrightarrow f(x) - x < f(0) \Leftrightarrow f(x) < x + f(0) \quad (2).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + f(0)) = -\infty$, οπότε θα είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$g(x) > g(0) \Leftrightarrow f(x) - x > f(0) \Leftrightarrow f(x) > x + f(0) \quad (1).$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + f(0)) = +\infty$, οπότε θα είναι και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$.

δ) Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x, x+2010]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x, x+2010)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x+2010) - f(x)}{x+2010 - x} \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(x+2010) - f(x)}{2010} \Leftrightarrow f(x+2010) - f(x) = 2010f'(\xi).$$

Για $x > 2$ η συνάρτηση f είναι κυρτή, οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως για $2 < x < \xi < x + 2010 \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(x + 2010) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2010f'(x) < 2010f'(\xi) < 2010f'(x + 2010) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2010f'(x) < f(x + 2010) - f(x) < 2010f'(x + 2010).$$

Για $x > 2$ είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + x^2}{e^x + x^2} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 2x}{e^x + 2x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x + 2}{e^x + 2} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^x}{e^x} = 2.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2010f'(x)) = 2010 \cdot 2 = 4020.$$

• Αν θέσουμε $x + 2010 = u$, τότε όταν το $x \rightarrow +\infty$ και το $u \rightarrow +\infty$, άρα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2010f'(x + 2010)) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2010f'(u)) = 2010 \cdot 2 = 4020.$$

Από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x + 2010) - f(x)) = 4020$.

ΘΕΜΑ 9ο (17ο – 2010)

Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f(1)=0$. Αν η συνάρτηση $f \circ f'$ ορίζεται στο $(0, +\infty)$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $(f \circ f')(x) = -f(x)$ (1), να αποδείξετε ότι:

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f' είναι το $A_{f'} = (0, +\infty)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) $f'(1) = 1$

δ) $(f' \circ f')(x) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ε) $xf''(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

στ) $f(x) = \ell \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Κατ' αρχάς είναι $A_{f'} \subseteq A_f = (0, +\infty)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- ή $A_{f'} = (0, +\infty)$
- ή θα υπάρξει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_0 \notin A_{f'}$.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο, ώστε $x_0 \notin A_{f'}$ τότε και με δεδομένο ότι

$A_{f \circ f'} = \{x \in A_{f'} / f'(x) \in A_f\}$ συμπεραίνουμε ότι το $x_0 \notin A_{f \circ f'}$, το οποίο είναι άτοπο, γιατί

$x_0 \in (0, +\infty)$ και $A_{f \circ f'} = (0, +\infty)$ από υπόθεση. Άρα $A_{f'} = (0, +\infty)$.

β) Από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ f'$:

$$A_{f \circ f'} = \{x \in A_{f'} / f'(x) \in A_f\} = \{x \in A_{f'} / f'(x) \in (0, +\infty)\}$$

προκύπτει ότι $f'(x) \in (0, +\infty)$ για κάθε $x \in A_{f'}$, δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Για $x=1$ από τη σχέση (1) έχουμε:

$$(f \circ f')(1) = -f(1) \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} (f \circ f')(1) = 0 \stackrel{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f(f'(1)) = f(1) \stackrel{f:1 \rightarrow 1}{\Leftrightarrow} f'(1) = 1.$$

δ) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ μπορούμε να θέσουμε στη σχέση (1) όπου x το $f'(x)$, οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (f \circ f')(f'(x)) &= -f(f'(x)) \Leftrightarrow f(f'(f'(x))) = -(f \circ f')(x) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(f'(f'(x))) = -(-f(x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(f'(f'(x))) = f(x) \stackrel{f:1 \rightarrow 1}{\Leftrightarrow} f'(f'(x)) = x \Leftrightarrow (f' \circ f')(x) = x \quad (2). \end{aligned}$$

- ε) Επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, παραγωγίζοντας τα μέλη της σχέσης (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} (f(f'(x)))' &= (-f(x))' \Leftrightarrow f'(f'(x)) \cdot f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow (f' \circ f')(x) \cdot f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x f''(x) = -f'(x) \Leftrightarrow x f''(x) + f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty). \end{aligned}$$

- στ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$x f''(x) + f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x f'(x))' = 0 \Leftrightarrow x f'(x) = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } x=1 \text{ είναι } f'(1) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1, \text{ άρα } x f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln x + c_2, \quad x \in (0, +\infty).$$

$$\text{Όμως } f(1) = 0, \text{ άρα } c_2 = 0, \text{ οπότε } f(x) = \ln x \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

ΘΕΜΑ 10ο (18ο – 2010)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f^2(x) + 2xf(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

B. Αν $f(0) = 1$, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x, \quad x \in \mathbb{R}$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x))$.

δ. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

ε. Να αποδείξετε ότι $\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(\sqrt{2}-1)$.

ΛΥΣΗ

A. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} f^2(x) + 2xf(x) = 1 &\Leftrightarrow f^2(x) + 2xf(x) + x^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = 1 + x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow g^2(x) = 1 + x^2 \quad (1), \text{ όπου } g(x) = f(x) + x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $1 + x^2 > 0 \Leftrightarrow g^2(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) \neq 0$ και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως άθροισμα συνεχών, θα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

B. α) Για $x = 0$ έχουμε $g(0) = f(0) + 0 = 1 > 0$, οπότε $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αφού $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, από (1) ισοδύναμα έχουμε:

$$g(x) = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{1+x^2} - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq x - x = 0$$

Άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (2).

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$|\eta\mu f(x)| \leq |f(x)| \stackrel{(2)}{=} f(x), \text{ άρα } -f(x) \leq \eta\mu f(x) \leq f(x).$$

$$\text{Είναι } f(x) = \sqrt{1+x^2} - x = \frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1+x^2 - x^2}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x},$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + 1} \right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

$$\text{Επίσης έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-f(x)) = 0.$$

$$\text{Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\eta\mu f(x)) = 0.$$

δ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$f'(x) = (\sqrt{1+x^2} - x)' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \stackrel{(2)}{<} 0.$$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να ορίσουμε τη συνάρτηση f^{-1} , λύνουμε την εξίσωση $y = f(x)$ ως προς x .

Έχουμε:

$$\begin{aligned} y = \sqrt{1+x^2} - x &\Leftrightarrow y+x = \sqrt{1+x^2} \stackrel{y+x \geq 0}{\Leftrightarrow} (y+x)^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow y^2 + 2xy + x^2 = 1+x^2 \Leftrightarrow 2xy = 1-y^2 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} x = \frac{1-y^2}{2y} \quad (3). \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } y+x \geq 0 \Leftrightarrow y + \frac{1-y^2}{2y} \geq 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} 2y^2 + 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 0, \text{ που είναι αληθές.}$$

$$\text{Η } (3) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{1-y^2}{2y}, \quad y > 0.$$

$$\text{Επομένως } f^{-1}: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \frac{1-x^2}{2x}.$$

ε. Από το (δ) ερώτημα έχουμε $f'(x) = \frac{-f(x)}{\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{f'(x)}{f(x)}$, άρα

$$\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_1^0 -\frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int_1^0 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln(f(x))]_0^1 = \ln(\sqrt{2}-1).$$

ΘΕΜΑ 11ο (20ο – 2010)

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

β) Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma$ να αποδείξετε ότι $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης g , για την οποία ισχύει

$$g^2(x) = f\left(\frac{e^x}{x}\right) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } g(1) = 1.$$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$e^{f(x)} + f(x) = x + \ln x \Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = e^{\ln x} + \ln x \quad (1).$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$, οπότε η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1».

Από (1) ισοδύναμα έχουμε $\varphi(f(x)) = \varphi(\ln x) \Leftrightarrow f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} \text{ και } f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα $[\alpha, \beta]$ και $[\beta, \gamma]$, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ και
- $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}$.

Είναι $0 < \alpha < \xi_1 < \beta < \xi_2 < \gamma$ και η συνάρτηση f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,

$$\text{οπότε } f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta}.$$

γ) Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g^2(x) = f\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x) = \ln\left(\frac{e^x}{x}\right) \Leftrightarrow g^2(x) = \ln e^x - \ln x \Leftrightarrow g^2(x) = x - \ln x \quad (2).$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$, τότε $x_0 - \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = x_0$ που είναι άτοπο, γιατί $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(Εφαρμογή 2 σχολ. Βιβλίου (Νέου) σελ. 148).

Άρα $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η συνάρτηση g λοιπόν είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και δε μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(1)=1>0$ συμπεραίνουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Επομένως από (2) προκύπτει ότι $g(x) = \sqrt{x - \ln x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$g'(x) = (\sqrt{x - \ln x})' = \frac{1}{2\sqrt{x - \ln x}} (x - \ln x)' = \frac{x - 1}{2x\sqrt{x - \ln x}}.$$

Είναι $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ και $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$, άρα ο πίνακας μονοτονίας και ακροτάτων της συνάρτησης g είναι:

x	0	1	$+\infty$
g'	—	0	+
g		1	

ελάχιστο

Η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ με ελάχιστη τιμή $g(1) = 1$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x - \ln x} = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x - \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{\ln x}{x}} \right) = +\infty, \text{ γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $g(A) = [1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 12ο (21ο – 2010)

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x) \geq xe^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x^2 \ln x} = 1$.

γ) Αν $\int_0^1 f(x) e^{-x} dx = 1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 1]$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε συνάρτηση $g(x) = f(x) - xe^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x) - xe^{2x} \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0)$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ του πεδίου ορισμού της τοπικό ακρότατο.

Επίσης η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = (f(x) - xe^{2x})' = f'(x) - e^{2x} - 2xe^{2x}$, άρα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$ με $g'(0) = f'(0) - 1$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Fermat, οπότε $g'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 1$.

β) Είναι $f'(0) = 1$, οπότε για $x \neq 0$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x \eta \mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x)}{x^2 \frac{\eta \mu x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} \right)^2 \frac{1}{\frac{\eta \mu x}{x}} \right] = 1^2 \cdot \frac{1}{1} = 1.$$

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq xe^{2x} \Leftrightarrow f(x)e^{-x} \geq xe^x \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^x \geq 0 \Leftrightarrow h(x) \geq 0$, όπου $h(x) = f(x)e^{-x} - xe^x$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x (e^x)' dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 x' e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1,$$

$$\text{οπότε } \int_0^1 h(x) dx = \int_0^1 (f(x)e^{-x} - xe^x) dx = \int_0^1 f(x)e^{-x} dx - \int_0^1 xe^x dx = 1 - 1 = 0.$$

$$\text{Έχουμε λοιπόν } h(x) = f(x)e^{-x} - xe^x \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } \int_0^1 h(x) dx = 0 \quad (1).$$

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $h(x_0) \neq 0$, τότε $h(x_0) > 0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $h(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$ αλλά η συνεχής συνάρτηση h δεν είναι παντού μηδέν,

$$\text{οπότε } \int_0^1 h(x) dx > 0, \text{ που είναι άτοπο λόγω της (1).}$$

Επομένως για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x)e^{-x} - xe^x = 0 \Leftrightarrow f(x) = xe^{2x}$.

ΘΕΜΑ 13ο (23ο – 2010)

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = 2x$ (I) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)} dt$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 2x_0$.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{x}$.

ΛΥΣΗ

α) Από τη σχέση (I) έχουμε $f'(x) = \frac{2}{3f^2(x)+1} > 0$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

άρα είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

β) Είναι $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)} dt = \int_0^1 f'(t) dt = [f(t)]_0^1 = f(1) - f(0)$.

Από τη σχέση (I) για $x=0$ έχουμε $f^3(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)[f^2(0)+1] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Από τη σχέση (I) για $x=1$ έχουμε $f^3(1) + f(1) = 2 \Leftrightarrow f^3(1) + f(1) - 2 = 0$ (2).

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

1	0	1	-2	1
///	1	1	2	
1	1	2	0	

η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται

$$(f(1)-1) \underbrace{(f^2(1)+f(1)+2)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow f(1)=1.$$

Άρα $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)} dt = f(1) - f(0) = 1 - 0 = 1$.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0, 1]$ με $g'(x) = f'(x) - 2x$.
- Είναι $g(0) = g(1)$, αφού $g(0) = 0$ και $g(1) = 0$.

Ισχύει λοιπόν το Θεώρημα Rolle, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 2x_0.$$

δ) i) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x) + f(x) = 2x \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) = 2x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{2}{1 + f^2(x)}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + f^2(x)) = +\infty$, άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + f^2(x)} = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

ii) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^3(x) + f(x) = 2x \Leftrightarrow f^3(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow \frac{f^3(x)}{x} = 2 - \frac{f(x)}{x}$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{f(x)}{x}\right) = 2 - 0 = 2$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^3(x)}{x} = 2$.

ΘΕΜΑ 14ο (24ο – 2010)

Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

iii) Για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$.

ΛΥΣΗ

i) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x) = -e^{-2x} + 1 = 1 - \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}}$.

Είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{και} \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow x > 0.$$

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f		0	

ελάχ.

Έχουμε:

- Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, με ελάχιστη τιμή $f(0) = 0$.

ii) ◦ Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (-\infty, 0]$, άρα $f(\Delta_1) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right)$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x \left(\frac{e^{-2x}}{2x} + 1 - \frac{1}{2x} \right) \right] = +\infty,$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right) = 1 - 0 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x}}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{-\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2e^{-2x}) = -\infty.$$

Άρα $f(\Delta_1) = [0, +\infty)$.

◦ Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [0, +\infty)$, άρα $f(\Delta_2) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$.

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-2x} + x - \frac{1}{2} \right) = +\infty,$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-2x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Άρα $f(\Delta_2) = [0, +\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0, +\infty)$.

iii) Αν $\kappa < 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ είναι αδύνατη.

Αν $\kappa = 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μια λύση.

Αν $\kappa > 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει δύο λύσεις.

ΘΕΜΑ 15ο (25ο – 2010)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + 2f(x) = x + 3$, (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f , της συνάρτησης f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 0)$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η f^3 είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$3f^2(x)f'(x) + 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)(3f^2(x) + 2) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + 2} \quad (2).$$

Είναι $f'(x) = \frac{1}{3f^2(x) + 2} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$,

άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \text{με } x, y \in \mathbb{R}, \text{ αφού } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Η (1) ισοδύναμα γράφεται $y^3 + 2y = f^{-1}(y) + 3 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^3 + 2y - 3, \quad y \in \mathbb{R}.$

Άρα $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 3 \quad (3).$

β) 1^{ος} τρόπος:

Είναι $f^{-1}(0) = -3$, άρα $f(-3) = 0$, οπότε το $K(-3, 0)$ είναι το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $x'x$.

Είναι $f^{-1}(1) = 0$, άρα $f(0) = 1$, οπότε το $\Lambda(0, 1)$ είναι το κοινό σημείο της C_f με τον άξονα $y'y$.

Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f και τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι:

$$E(\Omega) = \int_{-3}^0 |f(x)| dx.$$

Θέτουμε $y = f(x)$ άρα $x = f^{-1}(y) = y^3 + 2y - 3$ οπότε $dx = (y^3 + 2y - 3)' dy = (3y^2 + 2) dy$.

Επίσης ισχύουν οι ισοδυναμίες $x = -3 \Leftrightarrow y = 0$ και $x = 0 \Leftrightarrow y = 1$, οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_{-3}^0 |f(x)| dx = \int_0^1 |y| (3y^2 + 2) dy = \int_0^1 y (3y^2 + 2) dy = \\ &= \int_0^1 (3y^3 + 2y) dy = \left[\frac{3y^4}{4} + y^2 \right]_0^1 = \frac{3}{4} + 1 - 0 = \frac{7}{4} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος:

Τα κοινά σημεία της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι αντίστοιχα τα $K(-3, 0)$ και $\Lambda(0, 1)$.

Τα συμμετρικά των K, Λ ως προς την ευθεία $\delta: y=x$ είναι τα σημεία $K'(0, -3)$ και $\Lambda'(1, 0)$.

Είναι $f^{-1}(x) = x^3 + 2x - 3 = (x-1)(x^2 + x + 3)$, οπότε στο διάστημα $[0, 1]$ είναι $f^{-1}(x) \leq 0$.

Λόγω συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ ως προς την ευθεία $\delta: y=x$ το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega) = - \int_0^1 f^{-1}(x) dx = - \int_0^1 (x^3 + 2x - 3) dx = - \left[\frac{x^4}{4} + x^2 - 3x \right]_0^1 = - \left(\frac{1}{4} + 1 - 3 \right) = \frac{7}{4} \text{ τ.μ.}$$

γ) 1^{ος} τρόπος:

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής και ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M , τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \varepsilon: y - f(x_0) = \frac{1}{3f^2(x_0) + 2}(x - x_0).$$

Επειδή η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-1, 0)$, θα ισχύει:

$$0 - f(x_0) = \frac{1}{3f^2(x_0) + 2}(-1 - x_0) \Leftrightarrow 3f^3(x_0) + 2f(x_0) = x_0 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f^3(x_0) + (f^3(x_0) + 2f(x_0)) = x_0 + 1 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} 2f^3(x_0) + x_0 + 3 = x_0 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^3(x_0) = -1 \Leftrightarrow f(x_0) = -1.$$

Από την (1) έχουμε $(-1)^3 + 2(-1) = x_0 + 3 \Leftrightarrow x_0 = -6$.

Αρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(-6, -1)$ είναι:

$$\varepsilon: y - (-1) = \frac{1}{3(-1)^2 + 2}(x - (-6)) \Leftrightarrow \varepsilon: y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}.$$

2^{ος} τρόπος:

Το συμμετρικό του σημείου $A(-1, 0)$ ως προς την ευθεία $\delta: y = x$ είναι το σημείο $B(0, -1)$. Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ που διέρχεται από το σημείο B .

Έστω $N(x_0, f^{-1}(x_0))$ το σημείο επαφής και ζ η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο N , τότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$\zeta: y - f^{-1}(x_0) = (f^{-1})'(x_0) \cdot (x - x_0) \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \zeta: y - (x_0^3 + 2x_0 - 3) = (3x_0^2 + 2)(x - x_0).$$

Επειδή η ευθεία ζ διέρχεται από το σημείο $B(0, -1)$, θα ισχύει:

$$-1 - (x_0^3 + 2x_0 - 3) = (3x_0^2 + 2)(0 - x_0) \Leftrightarrow -x_0^3 - 2x_0 + 2 = -3x_0^3 - 2x_0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 = -2 \Leftrightarrow x_0^3 = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(f^{-1})'(x) = (x^3 + 2x - 3)' = 3x^2 + 2$ (4).

Από τις σχέσεις (3) και (4) για $x_0 = -1$ έχουμε $f^{-1}(-1) = -6$ και $(f^{-1})'(-1) = 5$.

Αρα η εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο $N(-1, -6)$ είναι:

$$\zeta: y - (-6) = 5(x - (-1)) \Leftrightarrow \zeta: y = 5x - 1.$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τη συμμετρική της $\zeta: y = 5x - 1$, ως προς την ευθεία $\delta: y = x$, που είναι η ευθεία ε . Αντιμεταθέτοντας τις μεταβλητές x, y έχουμε $\varepsilon: x = 5y - 1 \Leftrightarrow \varepsilon: y = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$.

ΘΕΜΑ 16ο (26ο – 2010)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (2-x)e^x$, $1 \leq x \leq 2$.

Να αποδείξετε ότι:

- i) Η f αντιστρέφεται.
- ii) Η γραφική παράσταση $C_{f^{-1}}$ της συνάρτησης f^{-1} και η ευθεία $y=x$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.
- iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^e f^{-1}(x) dx$, θεωρώντας ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο διάστημα $[0, e]$.

ΛΥΣΗ

- i) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$ άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.
- ii) Αρκεί να αποδείξουμε ότι η C_f με την ευθεία $\delta: y=x$, έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, αφού η ευθεία δ είναι ο άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$.

Τα κοινά σημεία των C_f και της ευθείας $\delta: y=x$, προκύπτουν από τη λύση της εξίσωσης

$$f(x) = x \Leftrightarrow (2-x)e^x - x = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = (2-x)e^x - x$, $x \in [1, 2]$.

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1, 2]$, ως πράξεις συνεχών.
- $g(1)g(2) = (e-1)(-2) < 0$.

Η συνάρτηση λοιπόν g ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1, 2]$, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Για κάθε $x \in [1, 2]$ είναι:

$$g'(x) = [(2-x)e^x - x]' = -e^x + (2-x)e^x - 1 = \underbrace{(1-x)e^x}_{\leq 0} \underbrace{-1}_{< 0} < 0.$$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

- iii) Είναι $I = \int_0^e f^{-1}(x) dx$. Θέτουμε $f^{-1}(x) = u \Leftrightarrow x = f(u)$, άρα $dx = f'(u)du$.

$$\text{Για } x=0 \text{ έχουμε } u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow f(u) = f(2) \xrightarrow{f: 1-1} u = 2.$$

$$\text{Για } x=e \text{ έχουμε } u = f^{-1}(e) \Leftrightarrow f(u) = e \Leftrightarrow f(u) = f(1) \xrightarrow{f: 1-1} u = 1.$$

Άρα έχουμε:

$$I = \int_0^e f^{-1}(x) dx = \int_2^1 u f'(u) du = [u f(u)]_2^1 - \int_2^1 f(u) du = f(1) - 2f(2) + \int_1^2 (2-u) e^u du =$$

$$= e + \int_1^2 (2-u)(e^u)' du = e + [(2-u)e^u]_1^2 - \int_1^2 (2-u)' e^u du = e - e + \int_1^2 e^u du = [e^u]_1^2 = e^2 - e.$$

ΘΕΜΑ 17ο (30ο – 2010)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$

A) Να βρείτε:

- Το σύνολο τιμών της f .
- Τις ασύμπτωτες της C_f .

B) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=e$.

Γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in (-1, 1)$ ισχύει $\int_{-a}^a f(x) \sin x dx = 0$.

ΛΥΣΗ

A) α) Για κάθε $x \in A_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{(4x)'(x^2-1) - (4x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{4(x^2-1) - (4x)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-4(x^2+1)}{(x^2-1)^2} < 0.$$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'	-		-		-
f					

Είναι:

- $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, -1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$.
- $f'(x) < 0$ στο $(-1, 1)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$.
- $f'(x) < 0$ στο $(1, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$.

Βρίσκουμε τα όρια στα άκρα των διαστημάτων του A_f .

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0.$

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{4x}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) = -\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{4x}{x-1} = 2 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{4x}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} \right) = +\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4x}{x-1} = 2 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x+1} = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{4x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = -\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x}{x+1} = 2 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{4x}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$, γιατί $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x}{x+1} = 2 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(A) = (-\infty, +\infty)$.

- β) • Η ευθεία με εξίσωση $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
- Η ευθεία με εξίσωση $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
- Η ευθεία με εξίσωση $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f , αφού $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$.
- Η ευθεία με εξίσωση $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f , αφού $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$.

Β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[2, e]$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [2, e]$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=2$ και $x=e$, είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_2^e f(x) dx = \int_2^e \frac{4x}{x^2-1} dx = 2 \int_2^e \frac{2x}{x^2-1} dx = 2 \int_2^e \frac{1}{x^2-1} (x^2-1)' dx = \\ &= 2 \left[\ln |x^2-1| \right]_2^e = 2 \ln(e^2-1) - 2 \ln 3 = 2 \ln \frac{e^2-1}{3} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

Γ) Η συνάρτηση $\varphi(x) = f(x) \cdot \sin x = \frac{4x \sin x}{x^2-1}$ είναι ορισμένη στο $(-1, 1)$ και είναι περιττή.

Πράγματι, για κάθε $x \in (-1, 1)$ έχουμε:

- $-x \in (-1, 1)$
- $\varphi(-x) = \frac{4(-x) \sin(-x)}{(-x)^2-1} = -\frac{4x \sin x}{x^2-1} = -\varphi(x)$.

$$\text{Είναι } \int_{-a}^a \varphi(x) dx = \int_{-a}^0 \varphi(x) dx + \int_0^a \varphi(x) dx = I_1 + I_2$$

Θέτουμε $x = -u$, οπότε $dx = -du$. Για $x = -a$ το $u = a$, ενώ για $x = 0$ το $u = 0$.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-a}^0 \varphi(x) dx = \int_a^0 \varphi(-u)(-du) = -\int_a^0 \varphi(-u) du = \\ &= \int_0^a \varphi(-u) du \stackrel{\varphi: \text{περιττή}}{=} \int_0^a -\varphi(u) du = -\int_0^a \varphi(u) du = -I_2 \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } \int_{-a}^a \varphi(x) dx = I_1 + I_2 = -I_2 + I_2 = 0.$$

ΘΕΜΑ 18ο (31ο – 2010)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $e^{f(x)} + f(x) = x$, (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το πρόσημό της.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=1+e$.

δ) Να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την εξίσωση $2f(x) + 1 = x$

ε) Να αποδείξετε ότι $(x-1)f'(x) < f(x) < \frac{x-1}{2}$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων, οπότε παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της (1) έχουμε:

$$(e^{f(x)} + f(x))' = (x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} f'(x) + f'(x) = 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)} + 1)f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} \quad (2).$$

Είναι $f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)} + 1} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι και «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \quad \text{με } x, y \in \mathbb{R}, \text{ αφού } f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}.$$

Η (1) ισοδύναμα γράφεται $e^y + y = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = e^y + y$, $y \in \mathbb{R}$.

Άρα $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = e^x + x$ (3).

β) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως σύνθεση παραγωγισίμων, άρα και η $\frac{1}{e^{f(x)} + 1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πηλίκο παραγωγισίμων,

οπότε η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = -\frac{e^{f(x)} f'(x)}{(e^{f(x)} + 1)^2} < 0$,

άρα η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Για $x=0$ από τη σχέση (3) έχουμε $f^{-1}(0) = 1$ άρα $f(1) = 0$ (4).

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

- Για $x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για $x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$.

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1, e+1]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e+1]$, επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=1+e$ είναι:

$$\text{Είναι } E(\Omega) = \int_1^{1+e} f(x) dx. \text{ Θέτουμε } f(x) = u \Leftrightarrow x = f^{-1}(u) \Leftrightarrow x = e^u + 1, \text{ άρα } dx = (e^u + 1)du.$$

$$\text{Για } x=1 \text{ έχουμε } 1 = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(0) = f^{-1}(u) \Leftrightarrow u = 0.$$

$$\text{Για } x=1+e \text{ έχουμε } 1+e = f^{-1}(u) \Leftrightarrow f^{-1}(1) = f^{-1}(u) \Leftrightarrow u = 1.$$

Άρα έχουμε:

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_1^{1+e} f(x) dx = \int_0^1 u(e^u + 1) du = \int_0^1 u e^u du + \int_0^1 u du = \int_0^1 u(e^u)' du + \int_0^1 u du = \\ &= [u e^u]_0^1 - \int_0^1 (u)' e^u du + \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = e - \int_0^1 e^u du + \frac{1}{2} = e - [e^u]_0^1 + \frac{1}{2} = e - (e - 1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

δ) Βρίσκουμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$

Είναι:

$$\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$\text{Για } x=1 \text{ από τη σχέση (2) έχουμε } f'(1) = \frac{1}{e^{f(1)} + 1} \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2}$$

Άρα:

$$\varepsilon: y - 0 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, οπότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ είναι από την C_f και πάνω, δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2f(x) \leq x - 1 \Leftrightarrow 2f(x) + 1 \leq x$$

με το ίσον να ισχύει μόνο για την τετμημένη του σημείου επαφής. Επομένως μοναδική ρίζα της εξίσωσης είναι η $x = 1$

ε) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, x]$, άρα ισχύει το Θ.Μ.Τ., οπότε θα υπάρχει ένα

$$\text{τουλάχιστον } \xi \in (1, x) \text{ τέτοιο, ώστε } f'(\xi) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} f'(\xi) = \frac{f(x)}{x - 1} \quad (5).$$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $\mathbb{R}$, άρα η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως για $1 < \xi < x \Rightarrow f'(1) > f'(\xi) > f'(x) \Rightarrow f'(x) < f'(\xi) < f'(1) \quad (6).$

$$\text{Για } x=1 \text{ από τη σχέση (2) έχουμε } f'(1) = \frac{1}{e^{f(1)} + 1} \stackrel{(4)}{=} \frac{1}{e^0 + 1} = \frac{1}{2} \quad (7).$$

$$\text{Η } (6) \stackrel{(5),(7)}{\Rightarrow} f'(x) < \frac{f(x)}{x - 1} < \frac{1}{2} \stackrel{x > 1}{\Rightarrow} (x - 1)f'(x) < f(x) < \frac{x - 1}{2}.$$

ΘΕΜΑ 19ο (32ο – 2010)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $f^4(x) + 3f'(x) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτησης f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$, $x \geq 0$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(0, f(0))$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη ε και την ευθεία με εξίσωση $x = 7$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ είναι:

- $f'(x) = -\frac{1}{3}f^4(x) < 0$, αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
- $f''(x) = -\frac{4}{3}f^3(x)f'(x) = -\frac{4}{3}f^3(x)\left(-\frac{1}{3}f^4(x)\right) = \frac{4}{9}f^7(x)$.

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0, +\infty)$. Επειδή $f(0) = 1 > 0$, συμπεραίνουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$, οπότε η f είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$.

β) Για κάθε $x \in [0, +\infty)$ έχουμε:

$$f^4(x) + 3f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3f'(x) = f^4(x) \Leftrightarrow -3f^{-4}(x)f'(x) = 1, \text{ άρα}$$

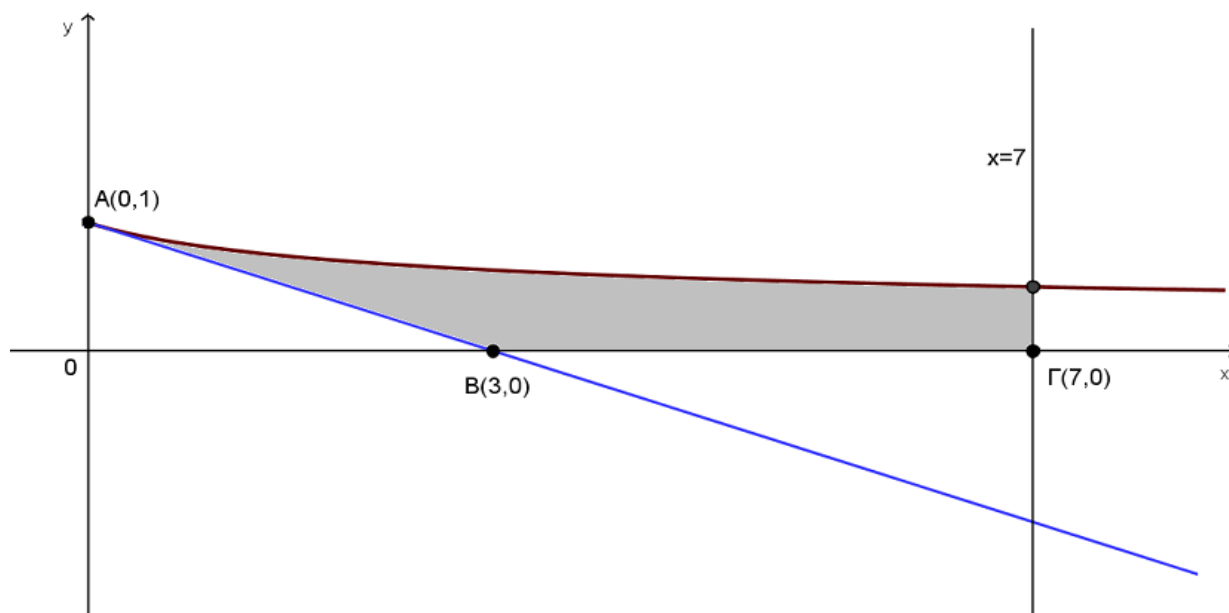
$$\left(-3\frac{f^{-3}(x)}{-3}\right)' = (x)' \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f^3(x)}\right)' = (x)' \Leftrightarrow \frac{1}{f^3(x)} = x + c.$$

$$\text{Είναι } f(0) = 1, \text{ άρα } c = 1, \text{ οπότε } \frac{1}{f^3(x)} = x + 1 \Leftrightarrow f^3(x) = \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}, \quad x \in [0, +\infty).$$

γ) Η εξίσωση εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 1 \quad (1).$$

δ) Για $y = 0$ από την (1) έχουμε $-\frac{1}{3}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Άρα η εφαπτομένη ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(3, 0)$. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη ε και την ευθεία με εξίσωση $x = 7$, είναι:



$$E(\Omega) = \int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx - (OAB) = \int_0^7 (x+1)^{-\frac{1}{3}} dx - \frac{1}{2}(OA)(OB) =$$

$$= \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} \right]_0^7 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{(x+1)^2} \right]_0^7 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}(4-1) - \frac{3}{2} = 3 \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 20ο (33^ο – 2010)

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = e^{-3x^2} + e^{-x^2}$ (1).

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - e \cdot f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx + e \int_1^0 f(x) dx < e - 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx = \frac{1-e}{4}$, αν είναι γνωστό ότι $h'(x) = 2e^{4x^2}$ και $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$, οπότε η (1) γράφεται $g(f(x)) = g(e^{-x^2})$ (2).

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι «1-1». Επομένως από τη σχέση (2) έχουμε $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} - e \cdot f(x) = e^{x^2} - e \cdot e^{-x^2} = e^{x^2} - e^{1-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $\varphi'(x) = e^{x^2} 2x - e^{1-x^2} (-2x) = 2x(e^{x^2} + e^{1-x^2})$.

Είναι:

- $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} + e^{1-x^2}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x(e^{x^2} + e^{1-x^2}) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Το πρόσημο της φ' , η μονοτονία και τα ακρότατα της φ φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
φ'	-	0	+
φ	↘ 1-e ↗		

ελάχισ.

Έχουμε:

- Η φ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και $\varphi'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$, άρα η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
- Η φ είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $\varphi'(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- Η φ παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 0$, με ελάχιστη τιμή $\varphi(0) = 1 - e$.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_0^1 e^{x^2} dx + e \int_1^0 e^{-x^2} dx < e - 1 \Leftrightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx - \int_0^1 e^{1-x^2} dx < e - 1 \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 (e^{x^2} - e^{1-x^2}) dx < e - 1 \Leftrightarrow \int_0^1 \varphi(x) dx < e - 1.$$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, άρα για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι

$$\varphi(0) \leq \varphi(x) \leq \varphi(1). \text{ Είναι } \varphi(0) = e^0 - e^{1-0} = 1 - e \text{ και } \varphi(1) = e - e^0 = e - 1, \text{ άρα } 1 - e \leq \varphi(x) \leq e - 1.$$

Είναι $e - 1 \geq \varphi(x) \Leftrightarrow e - 1 - \varphi(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } \int_0^1 [e - 1 - \varphi(x)] dx > 0 &\Leftrightarrow \int_0^1 (e - 1) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 (e - 1) dx > \int_0^1 \varphi(x) dx \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \int_0^1 \varphi(x) dx < \int_0^1 (e - 1) dx \Leftrightarrow \int_0^1 \varphi(x) dx < e - 1. \end{aligned}$$

δ) Είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} h(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} (x)' h(x) dx = [x h(x)]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x h'(x) dx = \frac{1}{2} h\left(\frac{1}{2}\right) - \int_0^{\frac{1}{2}} x \cdot 2e^{4x^2} dx = \\ &= 0 - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} (e^{4x^2})' dx = -\frac{1}{4} [e^{4x^2}]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} (e - 1) = \frac{1 - e}{4}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 21ο (34ο – 2010)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f , ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - \ln(x^4 + 1) < 1 - \ln 2$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2 + 1) - 2xe^x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{e^x(x - 1)^2}{(x^2 + 1)^2}.$$

Είναι:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στο διπλανό πίνακα.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	$+$	0	$+$
f			

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right).$$

Έχουμε:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \right) = 0$, γιατί $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 1} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2 + 1)'} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} \stackrel{\text{D.L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$.

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

γ) Είναι:

$$\begin{aligned} x^2 - \ln(x^4 + 1) < 1 - \ln 2 &\Leftrightarrow x^2 < 1 - \ln 2 + \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow x^2 < \ln e - \ln 2 + \ln(x^4 + 1) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 < \ln \frac{e(x^4 + 1)}{2} \Leftrightarrow e^{x^2} < \frac{e(x^4 + 1)}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{x^4 + 1} < \frac{e}{2} \Leftrightarrow \frac{e^{x^2}}{(x^2)^2 + 1} < \frac{e}{2} \Leftrightarrow f(x^2) < f(1) \quad (3). \end{aligned}$$

Για τους αριθμούς x^2 και 1 υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις: ή $x^2 > 1$, ή $x^2 = 1$, ή $x^2 < 1$.

Αν υποθέσουμε ότι $x^2 > 1$ και με δεδομένο ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, προκύπτει $f(x^2) > f(1)$ που είναι άτοπο λόγω της (3). Αν υποθέσουμε ότι $x^2 = 1$, τότε από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει $f(x^2) = f(1)$ που επίσης είναι άτοπο λόγω της (3).

Άρα από τη σχέση (3) προκύπτει $x^2 < 1$. Έχουμε λοιπόν $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

ΘΕΜΑ 22ο (36ο – 2010)

Δίνεται συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, με $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f''(x) = 2f(x)f'(x)$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = f^2(x) + 1$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(0) = 0$

$g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = g(f(x)) - g(\varepsilon\phi x)$ είναι

σταθερή στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \varepsilon\phi x$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

δ) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g , της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$, να αποδείξετε

ότι $g(1) = E + \frac{\ln 2}{2}$

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$(f'(x))' = (f^2(x))' \Leftrightarrow f'(x) = f^2(x) + c.$$

Όμως $f'(0) = f^2(0) + c \Leftrightarrow 1 = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα $f'(x) = f^2(x) + 1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) - g'(\varepsilon\phi x)(\varepsilon\phi x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'(x) = \frac{1}{1+f^2(x)}(1+f^2(x)) - \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2 x} \cdot (1+\varepsilon\phi^2 x) = 1 - 1 = 0.$$

Επομένως η συνάρτηση h είναι σταθερή. Έστω $h(x) = c_1$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Για $x = 0$ έχουμε $h(0) = c_1 \Leftrightarrow g(f(0)) - g(\varepsilon\varphi 0) = c_1 \Leftrightarrow g(0) - g(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$.

Άρα $h(x) = 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ) Για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) - g(\varepsilon\varphi x) = 0 \Leftrightarrow g(f(x)) = g(\varepsilon\varphi x) \stackrel{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = \varepsilon\varphi x$$

δ) Η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$, άρα για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $g(0) \leq g(x) \leq g(1)$, οπότε $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_g , της συνάρτησης g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = 1$, είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (x)' g(x) dx = [x g(x)]_0^1 - \int_0^1 x \cdot g'(x) dx = g(1) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \\ &= g(1) - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = g(1) - \frac{1}{2} [\ln|1+x^2|]_0^1 = g(1) - \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = g(1) - \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Είναι } E = g(1) - \frac{\ln 2}{2}, \text{ οπότε } g(1) = E + \frac{\ln 2}{2}$$