

**ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ**  
**ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ 2014**  
**ΕΠΙΚΑΙΡΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΝΕΑΣ ΥΛΗΣ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**  
**ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ – ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο : (6ο – 2014):**

Δίνονται οι γνησίως μονότονες συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- $(f^{-1}(2) - 3)^2 + (f(2) - 3)^2 = 0$
- $g(x) = f(2x - f(x)) - x$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι γνησίως φθίνουσες.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ισοδυναμία:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow g(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

γ) Αν επιπλέον η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι υπάρχουν

$$\xi_1 \in (1, 4) \text{ και } \xi_2 \in (2, 3) \text{ τέτοια, ώστε } 3f'(\xi_1) = g'(\xi_2) + 1$$

**ΛΥΣΗ**

α) Είναι:

$$(f^{-1}(2) - 3)^2 + (f(2) - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f^{-1}(2) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 3 \\ f(3) = 2 \end{cases}$$

- Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως μονότονη, επομένως ή θα είναι γνησίως αύξουσα ή θα είναι γνησίως φθίνουσα.

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, τότε:

$$2 < 3 \xRightarrow{f \uparrow} f(2) < f(3) \Rightarrow 3 < 2$$

που είναι άτοπο. Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα.

- Για τυχαία  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  με  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow -f(x_1) < -f(x_2)$

Είναι:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 < x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 < 2x_2 \\ -f(x_1) < -f(x_2) \end{cases} \xRightarrow{(+)} 2x_1 - f(x_1) < 2x_2 - f(x_2) \xRightarrow{f \downarrow} \\ &\Rightarrow f(2x_1 - f(x_1)) > f(2x_2 - f(x_2)) \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{cases} f(2x_1 - f(x_1)) > f(2x_2 - f(x_2)) \\ -x_1 > -x_2 \end{cases} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} f(2x_1 - f(x_1)) - x_1 > f(2x_2 - f(x_2)) - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$f^{-1}(x) = 2x - f(x) \Leftrightarrow f(2x - f(x)) = x \Leftrightarrow f(2x - f(x)) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

γ) Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , επομένως ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα  $[1, 4]$ , οπότε θα υπάρχει  $\xi_1 \in (1, 4)$  τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} \Rightarrow f'(\xi_1) = \frac{f(4) - f(1)}{3} \Rightarrow 3f'(\xi_1) = f(4) - f(1) \quad (2)$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$g(x) = f(2x - f(x)) - x$$

Η συνάρτηση  $2x - f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων, οπότε η συνάρτηση  $f(2x - f(x))$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως σύνθεση παραγωγισίμων συναρτήσεων και η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως διαφορά παραγωγισίμων συναρτήσεων.

Επομένως η συνάρτηση  $g$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα  $[2, 3]$ , οπότε θα υπάρχει  $\xi_2 \in (2, 3)$  τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi_2) = \frac{g(3) - g(2)}{3 - 2} \Rightarrow g'(\xi_2) = g(3) - g(2) \quad (3)$$

$$\text{Για } x=2 \text{ είναι } g(2) = f(2 \cdot 2 - f(2)) - 2 = f(4 - 3) - 2 = f(1) - 2, \text{ οπότε } f(1) - g(2) = 2 \quad (4)$$

$$\text{Για } x=3 \text{ είναι } g(3) = f(2 \cdot 3 - f(3)) - 3 = f(6 - 2) - 3 = f(4) - 3, \text{ οπότε } f(4) - g(3) = 3 \quad (5)$$

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} 3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) &= (f(4) - f(1)) - (g(3) - g(2)) \Rightarrow \\ 3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) &= (f(4) - g(3)) - (f(1) - g(2)) \stackrel{(4),(5)}{\Rightarrow} \\ 3f'(\xi_1) - g'(\xi_2) &= 3 - 2 \Rightarrow 3f'(\xi_1) = g'(\xi_2) + 1 \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 2ο : (8ο – 2014):

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x^2 f(x) - 2x^5 + 1 - \sin^2 x = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε τον τύπο της  $f$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι  $f(x) > 2x^3 - 1$

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $F(x) = f(x) + \frac{\eta \mu^2 x}{x^2}$  αντιστρέφεται και να ορίσετε την  $F^{-1}$

## ΛΥΣΗ

α) Για  $x \neq 0$  είναι:

$$f(x) = 2x^3 - \frac{1 - \sin^2 x}{x^2} = 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο  $x = 0$  έχουμε:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x^3) - \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 = 0 - 1 = -1$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}, & x \neq 0 \\ -1, & x = 0 \end{cases}$$

β) • Από υπόθεση η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο διάστημα  $[0, \pi]$

$$\bullet f(0) \cdot f(\pi) = (-1) \cdot (2\pi^3) = -2\pi^3 < 0$$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα  $[0, \pi]$ , άρα η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, \pi)$ , δηλαδή μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

γ) Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $h(x) = f(x) - 2x^3 + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ , τότε:

$$h(x) = 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} - 2x^3 + 1 = 1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = \frac{x^2 - \eta\mu^2 x}{x^2}$$

Είναι γνωστό ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \leq x^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - \eta\mu^2 x$$

και η ισότητα ισχύει μόνον για  $x = 0$

Η συνάρτηση  $h$  όμως έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}^*$ , επομένως  $x^2 - \eta\mu^2 x > 0$ , άρα  $h(x) > 0$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$ , δηλαδή  $f(x) - 2x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) > 2x^3 - 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$

δ) Η συνάρτηση  $f$  ορίζεται στο  $\mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $\frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$  ορίζεται στο  $\mathbb{R}^*$ , επομένως η συνάρτηση  $F$  ορίζεται στο  $\mathbb{R}^*$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι:

$$F(x) = f(x) + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = 2x^3 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} + \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} = 2x^3$$

Έστω  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^*$  με  $F(x_1) = F(x_2)$ , τότε έχουμε:

$$2x_1^3 = 2x_2^3 \Leftrightarrow x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η  $F$  είναι «1-1», οπότε αντιστρέφεται.

Για να βρούμε τον τύπο της  $F^{-1}$  λύνουμε την  $y = F(x)$  ως προς  $x$  στο  $\mathbb{R}^*$

Είναι:

$$\begin{cases} y = F(x) \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x^3 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \frac{y}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{y}{2}}, & y < 0 \end{cases} \Leftrightarrow F^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{y}{2}}, & y < 0 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } F^{-1}: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } F^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ -\sqrt[3]{-\frac{x}{2}}, & x < 0 \end{cases}$$

### ΘΕΜΑ 3ο : (9ο – 2014):

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση  $f^3(x) + f(x) = (x^2 - \eta\mu^2 x)^3$  (1)

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $0 \leq f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

β) Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 0

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$$

### ΛΥΣΗ

α) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$|\eta\mu x| \leq |x| \Leftrightarrow \eta\mu^2 x \leq x^2 \Leftrightarrow x^2 - \eta\mu^2 x \geq 0$$

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι:

$$f^3(x) + f(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)(f^2(x) + 1) \geq 0$$

που σημαίνει ότι:

$$f(x) \geq 0 \quad (2)$$

οπότε από (1) προκύπτει ότι:

$$f^3(x) \leq f^3(x) + f(x) = (x^2 - \eta\mu^2 x)^3 \Rightarrow$$

$$f^3(x) \leq (x^2 - \eta\mu^2 x)^3$$

Άρα

$$f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε ότι:

$$0 \leq f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x \quad (4)$$

β) Για  $x = 0$  από τη σχέση (4) έχουμε:

$$0 \leq f(0) \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad (5)$$

Επίσης είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$  και
- $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - \eta\mu^2 x) = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad (6)$

Από τις σχέσεις (5) και (6) έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , οπότε η  $f$  είναι συνεχής στο 0

γ) Από τη σχέση (4) για  $x \in \mathbb{R}^*$  έχουμε:

$$0 \leq \frac{f(x)}{x^2} \leq 1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2}$$

Επίσης είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$  και
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{\eta\mu^2 x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 - \left( \frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 \right] = 1 - 1^2 = 0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής έχουμε  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$

#### ΘΕΜΑ 4ο : (10ο – 2014):

Έστω συνεχής συνάρτηση  $f: [0, 8] \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση  $f^3(x) + f(x) = x + 2 \quad (1)$  για κάθε  $x \in [0, 8]$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β)  $f\left(\frac{23}{8}\right) = \frac{3}{2}$

γ) Η συνάρτηση  $f$  είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε τη συνάρτηση  $f^{-1}$

δ) Οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο και να βρείτε τις συντεταγμένες του .

## ΛΥΣΗ

α) 1<sup>ος</sup> τρόπος:

Έστω  $x_1, x_2 \in [0, 8]$  με  $x_1 < x_2$ , τότε  $x_1 - x_2 < 0$

Είναι:

$$f^3(x_1) + f(x_1) = x_1 + 2$$

$$f^3(x_2) + f(x_2) = x_2 + 2$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, οπότε έχουμε:

$$f^3(x_1) - f^3(x_2) + f(x_1) - f(x_2) = x_1 + 2 - x_2 - 2 \Rightarrow$$

$$(f(x_1) - f(x_2)) \cdot (f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2)) + f(x_1) - f(x_2) = x_1 - x_2 \Rightarrow$$

$$(f(x_1) - f(x_2)) \cdot \left( \underbrace{f^2(x_1) + f(x_1)f(x_2) + f^2(x_2) + 1}_{>0} \right) = \underbrace{x_1 - x_2}_{<0} \Rightarrow$$

$$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

2<sup>ος</sup> τρόπος:

Έστω ότι η συνάρτηση  $f$  δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε θα υπάρχουν  $x_1, x_2 \in [0, 8]$  με

$x_1 < x_2$  τέτοια, ώστε  $f(x_1) \geq f(x_2)$ , άρα και  $f^3(x_1) \geq f^3(x_2)$ , οπότε

$$f^3(x_1) + f(x_1) \geq f^3(x_2) + f(x_2) \xrightarrow{(2), (3)} x_1 + 2 \geq x_2 + 2 \Rightarrow x_1 \geq x_2,$$

που είναι άτοπο.

Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $\Delta = [0, 8]$ , οπότε το σύνολο τιμών της είναι  $f(\Delta) = [f(0), f(8)]$ . Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τις τιμές  $f(0)$  και  $f(8)$

Για  $x = 0$  από τη σχέση (1) έχουμε  $f^3(0) + f(0) = 2 \Leftrightarrow f^3(0) + f(0) - 2 = 0$  (2)

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

|     |   |   |    |   |
|-----|---|---|----|---|
| 1   | 0 | 1 | -2 | 1 |
| /// | 1 | 1 | 2  |   |
| 1   | 1 | 2 | 0  |   |

η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται

$$(f(0) - 1) \underbrace{(f^2(0) + f(0) + 2)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$$

Για  $x = 8$  από τη σχέση (1) έχουμε  $f^3(8) + f(8) = 10 \Leftrightarrow f^3(8) + f(8) - 10 = 0$  (3)

Χρησιμοποιώντας το σχήμα Horner

|     |   |   |     |   |
|-----|---|---|-----|---|
| 1   | 0 | 1 | -10 | 2 |
| /// | 2 | 4 | 10  |   |
| 1   | 2 | 5 | 0   |   |

η εξίσωση (3) ισοδύναμα γράφεται

$$(f(8) - 2) \underbrace{(f^2(8) + 2f(8) + 5)}_{\neq 0} = 0 \Leftrightarrow f(8) = 2$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι:

$$f(\Delta) = [1, 2]$$

β) Η συνάρτηση  $f$  είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα  $[0, 8]$  και  $1=f(0) \neq f(8)=2$ , οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών η  $f$  θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των  $f(0)=1$  και  $f(8)=2$ , δηλαδή θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (0, 8)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = \frac{3}{2}$

Για  $x = x_0$  από τη σχέση (1) έχουμε:

$$f^3(x_0) + f(x_0) = x_0 + 2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} = x_0 + 2 \Rightarrow$$

$$\frac{27}{8} + \frac{3}{2} = x_0 + 2 \Rightarrow x_0 = \frac{27}{8} + \frac{12}{8} - \frac{16}{8} \Rightarrow x_0 = \frac{23}{8}$$

γ) Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[0, 8]$ , άρα είναι και «1-1» στο διάστημα αυτό, οπότε αντιστρέφεται. Επομένως ορίζεται η συνάρτηση  $f^{-1}$ , η οποία έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ , δηλαδή  $A_{f^{-1}} = [1, 2]$

Επίσης για κάθε  $x \in [0, 8]$  έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

οπότε η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$y^3 + y = f^{-1}(y) + 2 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^3 + y - 2, \quad y \in [1, 2]$$

Επομένως:

$$f^{-1}: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{με} \quad f^{-1}(x) = x^3 + x - 2$$

δ) Για να βρούμε το κοινό σημείο των  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  λύνουμε το σύστημα:

$$(\Sigma): \begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y = f^{-1}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 + y - 2 = x \\ x^3 + x - 2 = y \end{cases}$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις παραπάνω σχέσεις, οπότε έχουμε:

$$y^3 - x^3 + y - x = x - y \Leftrightarrow y^3 - x^3 + 2(y - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y - x)(y^2 + xy + x^2) + 2(y - x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y - x)(\underbrace{y^2 + xy + x^2}_{>0} + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y - x = 0 \Leftrightarrow y = x$$

Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$(\Sigma): \begin{cases} y = x \\ x^3 + x - 2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^3 + x - 2 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{2} \\ x = \sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$$

Άρα οι  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  έχουν μοναδικό κοινό σημείο το  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$

**ΘΕΜΑ 5ο : (14ο – 2014):**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(0) = 1$
- $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f'(x) = \frac{(1+e^x)f(x)}{1+f(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$

γ) Να αποδείξετε ότι  $\frac{\alpha+2\beta}{3} < \ln\left(\frac{e^\alpha+2e^\beta}{3}\right)$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\alpha < \beta$

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , την παραβολή  $y = x^2 + 1$  και την ευθεία  $x = 1$

**ΛΥΣΗ**

α) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f'(x) = \frac{(1+e^x) \cdot f(x)}{1+f(x)} \Leftrightarrow f'(x)(1+f(x)) = (1+e^x)f(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f'(x)f(x)}{f(x)} = 1+e^x \Leftrightarrow (\ln f(x) + f(x))' = (x + e^x)' \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) + f(x) = x + e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Για  $x = 0$  έχουμε :

$$\ln f(0) + f(0) = 0 + e^0 + c \Leftrightarrow \ln 1 + 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Άρα

$$\ln f(x) + f(x) = x + e^x \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = x \cdot 1 + e^x \Leftrightarrow$$

$$\ln f(x) + f(x) = x \ln e + e^x \Leftrightarrow \ln f(x) + f(x) = \ln e^x + e^x \Leftrightarrow$$

$$f(x) + \ln f(x) = e^x + \ln e^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $h$  με  $h(t) = t + \ln t$ ,  $t > 0$ , που είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με

$h'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0$ , άρα η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  οπότε είναι και «1-1»

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$h(f(x)) = h(e^x) \stackrel{h:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$



β) Είναι:

$$g(x) = x \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = xe^{\frac{1}{x}}, \quad x \in \mathbb{R}^*$$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( xe^{\frac{1}{x}} \right)^{0 \cdot (+\infty)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{\frac{1}{u}} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty$$

Άρα η ευθεία  $x = 0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της  $C_g$

Επίσης  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1 = \lambda$  και

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [g(x) - x] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( xe^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - e^0}{u - 0} = \left. \frac{de^u}{du} \right|_{u=0} = e^0 = 1 = \beta \end{aligned}$$

Άρα η ευθεία  $y = x + 1$  είναι πλάγια ασύμπτωτη της  $C_g$  στο  $-\infty$  και στο  $+\infty$

γ) Είναι:

$$\alpha < \frac{\alpha + 2\beta}{3} < \beta \Leftrightarrow 3\alpha < \alpha + 2\beta < 3\beta \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha < \alpha + 2\beta \\ \alpha + 2\beta < 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha < 2\beta \\ \alpha < \beta \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < \beta \text{ που ισχύει.}$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο  $[\alpha, \beta]$  με  $f'(x) = e^x$ , οπότε ικανοποιεί

τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. σε καθένα από τα διαστήματα  $\left[ \alpha, \frac{\alpha + 2\beta}{3} \right]$  και  $\left[ \frac{\alpha + 2\beta}{3}, \beta \right]$ ,

επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\xi_1 \in \left( \alpha, \frac{\alpha + 2\beta}{3} \right)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{\alpha + 2\beta}{3} - \alpha} = \frac{f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{2(\beta - \alpha)}{3}}$
- $\xi_2 \in \left( \frac{\alpha + 2\beta}{3}, \beta \right)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)}{\beta - \frac{\alpha + 2\beta}{3}} = \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha + 2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta - \alpha}{3}}$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε  $f''(x) = e^x > 0$ , άρα η συνάρτηση  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα, οπότε για

$$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{2(\beta-\alpha)}{3}} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{3}} \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) - f(\alpha) < 2\left[f(\beta) - f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right)\right] \Rightarrow 3f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < f(\alpha) + 2f(\beta) \Rightarrow$$

$$f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) < \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3} \Rightarrow e^{\frac{\alpha+2\beta}{3}} < \frac{e^\alpha + 2e^\beta}{3} \Rightarrow \frac{\alpha+2\beta}{3} < \ln\left(\frac{e^\alpha + 2e^\beta}{3}\right)$$

δ) Σχηματίζουμε τη διαφορά  $\Delta(x) = e^x - x^2 - 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση  $\Delta$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $\Delta'(x) = e^x - 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Επίσης  $\Delta''(x) = e^x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι  $\Delta''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$

επομένως ο πίνακας μονοτονίας – ακροτάτων είναι ο παρακάτω:

| x             | $-\infty$  | $\ln 2$ | $+\infty$  |
|---------------|------------|---------|------------|
| $\Delta''(x)$ |            | 0       |            |
| $\Delta'(x)$  | $\swarrow$ |         | $\searrow$ |

Ελάχιστο

$$\Delta'(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0 \quad (\text{εφόσον } e > 2 \Rightarrow \ln e > \ln 2 \Rightarrow 1 > \ln 2)$$

Άρα  $\Delta'(x) \geq \Delta'(\ln 2) > 0 \Rightarrow \Delta'(x) > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε η συνάρτηση  $\Delta$  είναι γνησίως αύξουσα

στο  $\mathbb{R}$ . Είναι  $\Delta(0) = e^0 - 0^2 - 1 = 0$ . Άρα η  $x=0$  είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $\Delta(x) = 0$  και ισχύει:

$$\Delta([0, 1]) = [\Delta(0), \Delta(1)] = [0, e - 2], \text{ άρα } \Delta(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [0, 1]$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 |\Delta(x)| dx = \int_0^1 (e^x - x^2 - 1) dx = \left[ e^x - \frac{x^3}{3} - x \right]_0^1 = \\ &= e - \frac{1}{3} - 1 - (e^0 - 0) = e - \frac{1}{3} - 2 = e - \frac{7}{3} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

## ΘΕΜΑ 6ο : (15ο – 2014):

Έστω συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1} = 4 \quad \text{και οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις } g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g'(x) = f(x) \text{ και}$$

$$h(x) = g(x+1) - g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Αν } g(1) = \frac{4}{3} \text{ και } g(2) = \frac{14}{3}, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

α)  $f(1) = 2$

β)  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

γ) Υπάρχει μοναδικό  $\xi \in (1, 2)$  τέτοιο, ώστε  $g(\xi) = 3$

δ) Υπάρχουν  $\theta_1, \theta_2 \in (1, 2)$  τέτοια, ώστε  $\frac{f(\theta_1) + f(\theta_2)}{f(\theta_1) \cdot f(\theta_2)} = \frac{3}{5}$

ε) Υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\rho \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f(\rho+1) - f(\rho) = 2$

## ΛΥΣΗ

α) Έστω  $\varphi(x) = \frac{f(x) \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1}$  για  $x$  κοντά στο 1, οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi(x) = 4$

Για  $x$  κοντά στο 1 έχουμε:

$$f(x) = \frac{\varphi(x)(\sqrt{x}-1)}{\eta\mu(x-1)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\varphi(x)(x-1)}{\eta\mu(x-1)(\sqrt{x}+1)} \Leftrightarrow f(x) = \varphi(x) \cdot \frac{1}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x-1} \stackrel{x-1=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \varphi(x) \cdot \frac{1}{\frac{\eta\mu(x-1)}{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right] = 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$  ισχύει  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

β) Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $f(x) \neq 0$ , οπότε η συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο στο  $\mathbb{R}$ . Επειδή  $f(1) = 2 > 0$  συμπεραίνουμε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

γ) Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , άρα είναι και συνεχής στο  $\mathbb{R}$

Επίσης είναι:

$$g'(x) = f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

Έχουμε:

- η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $[1, 2]$
- $g(1) \neq g(2)$
- $3 \in (g(1), g(2)) = \left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)$

Ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών, επομένως θα υπάρχει  $\xi \in (1, 2)$ , το οποίο είναι και μοναδικό, αφού η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα τέτοιο, ώστε  $g(\xi) = 3$

δ) Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , άρα και σε καθένα από τα διαστήματα  $[1, \xi]$  και  $[\xi, 2]$ , οπότε ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον:

- $\theta_1 \in (1, \xi)$  τέτοιο, ώστε:

$$g'(\theta_1) = \frac{g(\xi) - g(1)}{\xi - 1} \Rightarrow f(\theta_1) = \frac{3 - \frac{4}{3}}{\xi - 1} \Rightarrow \xi - 1 = \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_1)} \quad (1) \text{ και}$$

- $\theta_2 \in (\xi, 2)$  τέτοιο, ώστε:

$$g'(\theta_2) = \frac{g(2) - g(\xi)}{2 - \xi} \Rightarrow f(\theta_2) = \frac{\frac{14}{3} - 3}{2 - \xi} \Rightarrow 2 - \xi = \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_2)} \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$1 = \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_1)} + \frac{\frac{5}{3}}{f(\theta_2)} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{1}{f(\theta_1)} + \frac{1}{f(\theta_2)} \Rightarrow \frac{f(\theta_1) + f(\theta_2)}{f(\theta_1)f(\theta_2)} = \frac{3}{5}$$

ε) Η συνάρτηση  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο  $[0, 1]$  με

$$\begin{aligned} h'(x) &= (g(x+1) - g(x))' = g'(x+1)(x+1)' - g'(x) = \\ &= g'(x+1) - g'(x) = f(x+1) - f(x) \end{aligned}$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ, άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\rho \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε:

$$h'(\rho) = \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} \Rightarrow f(\rho+1) - f(\rho) = h(1) - h(0)$$

Όμως:

$$h(1) = g(2) - g(1) = \frac{14}{3} - \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \quad \text{και}$$

$$h(0) = g(1) - g(0) = \frac{4}{3} - 0 = \frac{4}{3}$$

Οπότε:

$$f(\rho+1) - f(\rho) = \frac{10}{3} - \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

### ΘΕΜΑ 7ο : (16ο – 2014):

Έστω  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνάρτηση δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $f'(0) = f'(1) = 0$
- $f(0) = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση  $g(x) = f(x) - x^2 + x$

α) Αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης  $C_g$  της συνάρτησης  $g$  στα σημεία της με τετμημένες  $x_1 = 0$  και  $x_2 = 1$  τέμνονται στο σημείο με τετμημένη  $x_3 = \frac{1}{2}$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- i)  $g(1) = 0$
- ii) Υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  ώστε  $g'(\xi) + 2\xi = 1$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (1-x)f'(x) dx$$

$$\text{ii) } \text{Υπάρχει } x_0 \in [0, 1], \text{ ώστε } f'(x_0) = 2 \int_0^1 f(x) dx$$

### ΛΥΣΗ

α) i) Η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$  με  $g'(x) = f'(x) - 2x + 1$ , οπότε  $g'(0) = f'(0) + 1 = 1$  και  $g'(1) = f'(1) - 1 = -1$

Επίσης:

$$g(0) = f(0) = 0 \quad \text{και} \quad g(1) = f(1) \quad (1)$$

οπότε οι εφαπτόμενες της  $C_g$  στα σημεία  $A(0, g(0))$  και  $B(1, g(1))$  έχουν αντίστοιχα εξισώσεις:

$$\varepsilon_A: y - g(0) = g'(0)(x - 0) \Rightarrow y = x \quad \text{και}$$

$$\varepsilon_B: y - g(1) = g'(1)(x - 1) \Rightarrow y - f(1) = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1 + f(1)$$

Το σημείο  $M\left(\frac{1}{2}, y_0\right)$  είναι το σημείο τομής των εφαπτόμενων  $\varepsilon_A$  και  $\varepsilon_B$ , οπότε έχουμε:

$$y_0 = \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y_0 = -\frac{1}{2} + 1 + f(1)$$

Επομένως έχουμε:

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1 + f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g(1) = 0$$

ii) Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[0, 1]$  με  $f'(x) = g'(x) + 2x - 1$

Είναι  $f(0) = 0$  και  $f(1) = 0$ , οπότε  $f(0) = f(1)$ , δηλαδή ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle.

Επομένως θα υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f'(\xi) = 0$

Επιπλέον

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow g'(\xi) + 2\xi - 1 = 0 \Rightarrow g'(\xi) + 2\xi = 1 \quad (2)$$

β) i) Είναι:

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x-1)' f(x) dx = [(x-1)f(x)]_0^1 - \int_0^1 (x-1)f'(x) dx \stackrel{f(0)=0}{=} \int_0^1 (1-x)f'(x) dx \quad (6)$$

ii) Η συνάρτηση  $f'$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, 1]$  ως παραγωγίσιμη, άρα παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή. Αν  $m, M$  είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της στο  $[0, 1]$ , τότε έχουμε:

$$m \leq f'(x) \leq M$$

Επειδή  $1-x \geq 0$  έχουμε:

$$(1-x)m \leq (1-x)f'(x) \leq (1-x)M \Rightarrow$$

$$m \int_0^1 (1-x) dx \leq \int_0^1 (1-x)f'(x) dx \leq M \int_0^1 (1-x) dx$$

Είναι:

$$\int_0^1 (1-x) dx = \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{2}m \leq \int_0^1 (1-x)f'(x) dx \leq \frac{1}{2}M \stackrel{(6)}{\Rightarrow} m \leq 2 \int_0^1 f(x) dx \leq M$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός  $2 \int_0^1 f(x) dx$  ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f'$ , άρα

υπάρχει  $x_0 \in [0, 1]$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 2 \int_0^1 f(x) dx$

**ΘΕΜΑ 8ο : (17ο – 2014):**

Έστω  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(x) + 1 = 2x(f(x) + x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = e^{x^2} - x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή.

γ) Να αποδείξετε ότι  $e^{x^2-1} \geq 2x-1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

δ) Να λύσετε στο διάστημα  $(0, +\infty)$  την εξίσωση  $e^{x^4-x^2} = \frac{1}{x}$

ε) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(1) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$g'(x) = f(x) + f(2-x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

**ΛΥΣΗ**

α) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$f'(x) + 1 = 2x(f(x) + x) \Rightarrow f'(x) - 2xf(x) = -1 + 2x^2 \Rightarrow$$

$$f'(x)e^{-x^2} + e^{-x^2}(-2x)f(x) = -e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2} \Rightarrow$$

$$f'(x)e^{-x^2} + e^{-x^2}(-2x)f(x) = (-x)'e^{-x^2} + (-x)e^{-x^2}(-2x) \Rightarrow$$

$$f'(x)e^{-x^2} + e^{-x^2}(-x^2)'f(x) = (-x)'e^{-x^2} + (-x)e^{-x^2}(-x^2)' \Rightarrow$$

$$\left(f(x)e^{-x^2}\right)' = \left(-xe^{-x^2}\right)' \Rightarrow f(x)e^{-x^2} = -xe^{-x^2} + c$$

και  $f(0) = 1$ , οπότε  $c = 1$

Άρα:

$$f(x)e^{-x^2} = -xe^{-x^2} + 1$$

Επομένως:

$$f(x) = e^{x^2} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 1 \quad \text{και} \quad f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} = 2(2x^2 + 1)e^{x^2}$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f''(x) = 2(2x^2 + 1)e^{x^2} > 0$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$

γ) Είναι:

$$f(1) = e - 1 \quad \text{και} \quad f'(1) = 2e - 1$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 1$  είναι:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Rightarrow y - (e - 1) = (2e - 1)(x - 1) \Rightarrow y = (2e - 1)x - e$$

Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ , η εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 1$  βρίσκεται από την  $C_f$  και κάτω.

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq (2e - 1)x - e \Rightarrow e^{x^2} - x \geq 2ex - x - e \Rightarrow \\ e^{x^2} &\geq (2x - 1)e \Rightarrow \frac{e^{x^2}}{e} \geq 2x - 1 \Rightarrow e^{x^2-1} \geq 2x - 1 \end{aligned}$$

δ) 1<sup>ος</sup> τρόπος:

Στο διάστημα  $(0, +\infty)$  έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{x^4-x^2} = \frac{1}{x} &\Leftrightarrow \frac{e^{x^4}}{e^{x^2}} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{e^{x^4}}{e^{x^2}} = \frac{x}{x^2} \Leftrightarrow x^2 e^{x^4} = x e^{x^2} \Leftrightarrow \\ 2x^2 e^{x^4} &= 2x e^{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 e^{x^4} - 1 = 2x e^{x^2} - 1 \Leftrightarrow f'(x^2) = f'(x) \quad (1) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1 - 1», οπότε από τη σχέση (1) έχουμε:

$$x^2 = x \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} x = 1$$

2<sup>ος</sup> τρόπος:

Στο διάστημα  $(0, +\infty)$  έχουμε:

$$e^{x^4-x^2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x(e^{x^4-x^2}) = 1 \quad (2)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = x(e^{x^4-x^2}), \quad x \in (0, +\infty)$$

Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= (x)'(e^{x^4-x^2}) + x(e^{x^4-x^2})' = \\ &= e^{x^4-x^2} + x e^{x^4-x^2} (x^4 - x^2)' = \\ &= e^{x^4-x^2} + x e^{x^4-x^2} (4x^3 - 2x)' = \\ &= e^{x^4-x^2} (4x^4 - 2x^2 + 1) = e^{x^4-x^2} [3x^4 + (x^2 - 1)^2] > 0 \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση  $\varphi$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε είναι και «1 - 1», επομένως από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\varphi(x) = \varphi(1) \stackrel{\varphi:1-1}{\Leftrightarrow} x = 1$$



ε) i) Η συνάρτηση  $g'$  είναι παραγωγίσιμη (σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με:

$$g''(x) = f'(x) - f'(2-x)$$

Δεδομένου ότι η συνάρτηση  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  έχουμε:

- $g''(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(2-x) \Leftrightarrow x > 2-x \Leftrightarrow x > 1$
- $g''(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(2-x) \Leftrightarrow x < 2-x \Leftrightarrow x < 1$
- $g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση  $g$  είναι κυρτή στο διάστημα  $[1, +\infty)$ , κοίλη στο διάστημα  $(-\infty, 1]$  και παρουσιάζει καμπή στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 1$ . Το σημείο καμπής της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης  $g$  είναι το  $M(1, g(1))$ , δηλαδή το  $M(1, 0)$ , αφού  $g(1) = 0$

### ΘΕΜΑ 9ο : (18ο – 2014):

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0) = 2$ , η οποία για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιεί τη σχέση  $f(x) = \frac{e^{2x}}{F(x)-x} + 1$ , όπου  $F$  είναι μία αρχική συνάρτηση της  $f$  στο  $\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης  $f$

β) Αν  $f(x) = e^x + 1$ , τότε:

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{f(x)} dx$

ii) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon\varphi x) - f(\eta\mu x)}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x}$

iii) Αν μια συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in [0, 1]$ , ώστε

$$\int_0^1 h(x)f(\sqrt{x})dx = h(\xi) \int_0^1 f(\sqrt{x})dx$$

### ΛΥΣΗ

α) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{F(x)-x} + 1 \Leftrightarrow f(x) - 1 = \frac{e^{2x}}{F(x)-x} \Leftrightarrow$$

$$(F(x)-x)(f(x)-1) = e^{2x} \Leftrightarrow (F(x)-x)(F(x)-x)' = e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$2(F(x)-x)(F(x)-x)' = 2e^{2x} \Leftrightarrow [(F(x)-x)^2]' = (e^{2x})' \Leftrightarrow$$

$$(F(x)-x)^2 = e^{2x} + c \quad (2)$$

Για  $x = 0$  από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(0) = \frac{e^0}{F(0)-0} + 1 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{F(0)} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{F(0)} = 1 \Leftrightarrow F(0) = 1$$

Για  $x = 0$  από τη σχέση (2) έχουμε:

$$(F(0) - 0)^2 = e^0 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$$

Για  $c = 0$  από τη σχέση (2) έχουμε:

$$(F(x) - x)^2 = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επομένως:

$$\varphi^2(x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

$$\text{όπου } \varphi(x) = F(x) - x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$\varphi^2(x) = e^{2x} > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Οπότε ισχύει:

$$\varphi(x) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση  $\varphi$  δε μηδενίζεται και είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο  $\mathbb{R}$ , οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο στο  $\mathbb{R}$

Για  $x = 0$  από τη σχέση (4) έχουμε:

$$\varphi(0) = F(0) - 0 = F(0) = 1 > 0$$

Άρα

$$\varphi(x) > 0, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Οπότε από τη σχέση (3) έχουμε:

$$\varphi(x) = e^x \stackrel{(4)}{\Leftrightarrow} F(x) - x = e^x \Leftrightarrow F(x) = e^x + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επειδή η  $F$  είναι μία αρχική συνάρτηση της  $f$  στο  $\mathbb{R}$ , ισχύει:

$$f(x) = F'(x) = (e^x + x)' = e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επομένως:

$$f(x) = e^x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

**β) i)** Έχουμε:

$$I = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{f(x)} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 1}{e^x + 1} dx$$

Αν θέσουμε  $x = -u$  τότε, έχουμε  $dx = -du$ ,  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = -1$  και

$$I = - \int_1^{-1} \frac{x^2 + 1}{e^{-x} + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{(x^2 + 1)e^x}{e^x + 1} dx$$

οπότε

$$2I = \int_{-1}^1 \frac{(x^2 + 1)(e^x + 1)}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = \left[ \frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 = \frac{8}{3}$$

Άρα

$$I = \frac{4}{3}$$

ii) Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon\varphi x) - f(\eta\mu x)}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon\varphi x} - e^{\eta\mu x}}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\eta\mu x} (e^{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x} - 1)}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x} = 1 \end{aligned}$$

διότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\eta\mu x} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x} - 1}{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\varepsilon\varphi x - \eta\mu x} (\varepsilon\varphi x - \eta\mu x)'}{(\varepsilon\varphi x - \eta\mu x)'} = 1$$

iii) Η συνάρτηση  $h$ , ως συνεχής στο διάστημα  $[0, 1]$  λαμβάνει μέγιστη τιμή  $M$  και ελάχιστη τιμή  $m$ . Επίσης  $f(\sqrt{x}) > 0$ , οπότε έχουμε:

$$m \leq h(x) \leq M \Rightarrow m f(\sqrt{x}) \leq h(x) f(\sqrt{x}) \leq M f(\sqrt{x}) \Rightarrow$$

$$m \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leq \int_0^1 h(x) f(\sqrt{x}) dx \leq M \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$$

Επομένως, ο αριθμός

$$\frac{\int_0^1 h(x) f(\sqrt{x}) dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx}$$

ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης  $h$ .

Άρα υπάρχει  $\xi \in [0, 1]$  τέτοιο, ώστε

$$h(\xi) = \frac{\int_0^1 h(x) f(\sqrt{x}) dx}{\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 h(x) f(\sqrt{x}) dx = h(\xi) \int_0^1 f(\sqrt{x}) dx$$

που είναι το ζητούμενο.

**ΘΕΜΑ 10ο : (19ο – 2014):**

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+2) - 5}{x-1} = 6$

α) Να αποδείξετε ότι:

i)  $f(3) = 5$  και ii)  $f'(3) = 6$

β) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)}$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $h(x) = xf(x) - 3x - 7\sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , τέμνει τον άξονα  $x'x$  τουλάχιστον σε ένα σημείο.

δ) Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει  $g'(x) \leq f'(3)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $g(x) = x^6$ , έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1.

**ΛΥΣΗ**

α) i) Για  $x \neq 1$ , θέτουμε  $w(x) = \frac{f(x+2) - 5}{x-1}$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} w(x) = 6 \quad \text{και} \quad f(x+2) = (x-1)w(x) + 5$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x+2) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x-1)w(x) + 5] = 5$$

Η συνάρτηση  $f(x+2)$  είναι συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x+2) = f(1+2) = f(3)$$

οπότε:

$$f(3) = 5$$

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι για  $x$  κοντά στο  $x_0 = 3$  είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = 6$$

Αν θέσουμε  $x = u + 2$  τότε όταν  $x \rightarrow 3$  το  $u \rightarrow 1$ , οπότε έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u+2) - f(3)}{u-1} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{f(u+2) - 5}{u-1} = 6$$

Επομένως:

$$f'(3) = 6$$

β) Για  $x$  κοντά στο  $x_0 = 3$  είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2-f(x)}{\eta\mu(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x+2-f(x)}{x-3}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{x+2-f(x)-5+5}{x-3}}{\frac{\eta\mu(x-3)}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3-(f(x)-5)}{\frac{x-3}{\eta\mu(x-3)}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3-(f(x)-f(3))}{\frac{x-3}{\eta\mu(x-3)}} = \frac{1-f'(3)}{1} = 1-6 = -5, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu(x-3)}{x-3} \stackrel{x-3=u}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3)$$

**Σχόλιο:** Δεν μπορούμε να εργαστούμε με τον κανόνα De L'Hospital γιατί δεν γνωρίζουμε αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα της μορφής  $(\alpha, 3) \cup (3, \beta)$

γ) Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο διάστημα  $[0, 3]$ , ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης ισχύουν:

- $h(0) = -7 < 0$  και
- $h(3) = 3f(3) - 9 - 7\sin 3 = 15 - 9 - 7\sin 3 = 6 - 7\sin 3 > 0$ ,

αφού  $\frac{\pi}{2} < 3 < \pi$  και στο  $2^\circ$  τεταρτημόριο το συνημίτονο είναι αρνητικός αριθμός.

Επομένως  $h(0) \cdot h(3) < 0$

Άρα η συνάρτηση  $h$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα  $[0, 3]$ , οπότε η εξίσωση  $h(x) = 0$  έχει μία τουλάχιστον λύση στο  $(0, 3)$ , δηλαδή η γραφική παράσταση της  $h$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ) Έστω ότι η εξίσωση  $g(x) = x^6$  έχει δύο τουλάχιστον λύσεις  $x_1$  και  $x_2$  με  $1 < x_1 < x_2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi(x) = g(x) - x^6$ ,  $x \in [x_1, x_2]$ . Η συνάρτηση  $\varphi$  είναι συνεχής στο  $[x_1, x_2]$ , παραγωγίσιμη στο  $(x_1, x_2)$  με παράγωγο  $\varphi'(x) = g'(x) - 6x^5$  και ισχύει  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0$

Άρα η συνάρτηση  $\varphi$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[x_1, x_2]$ , οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε  $\varphi'(\xi) = 0$

Είναι:

$$\varphi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) - 6\xi^5 = 0 \Leftrightarrow g'(\xi) = 6\xi^5$$

Όμως:

$$g'(\xi) \leq f'(3) \Leftrightarrow g'(\xi) \leq 6$$

Άρα:

$$6\xi^5 \leq 6 \Leftrightarrow \xi^5 \leq 1 \Leftrightarrow \xi \leq 1 \text{ που είναι άτοπο, αφού } 1 < x_1 < \xi < x_2$$

Επομένως η εξίσωση  $g(x) = x^6$ , έχει το πολύ μία ρίζα μεγαλύτερη του 1

**ΘΕΜΑ 11ο : (20ο – 2014):**

Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \ln f(x)$

Αν οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με  $\alpha < \beta < \gamma$  και οι  $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$  με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε να αποδείξετε ότι:

I) Υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύει:

$$f(x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_2)$$

II) Υπάρχει  $\xi \in \mathbb{R}$ , ώστε να ισχύει:

$$f(\xi) \cdot f''(\xi) = (f'(\xi))^2$$

**ΛΥΣΗ**

I) Οι πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta, \gamma$  με  $\alpha < \beta < \gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν ονομάσουμε  $\omega$  τη διαφορά της προόδου, τότε έχουμε:

$$2\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta - \alpha = \gamma - \alpha = \omega \quad (1) \quad \text{με } \omega > 0$$

Οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί  $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma)$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Αν ονομάσουμε  $\lambda$  το λόγο της προόδου, τότε έχουμε:

$$f^2(\beta) = f(\alpha) \cdot f(\gamma) \Rightarrow \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \frac{f(\gamma)}{f(\beta)} = \lambda \quad (2) \quad \text{με } \lambda > 0$$

$$\text{Από τη σχέση (2) έχουμε } \ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} = \ln \frac{f(\gamma)}{f(\beta)} \quad (3)$$

Η συνάρτηση  $g$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σε καθένα από τα διαστήματα  $[\alpha, \beta]$  και  $[\beta, \gamma]$ , αφού είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ , οπότε υπάρχουν:

$$\bullet \quad x_1 \in (\alpha, \beta) \text{ τέτοιο, ώστε } g'(x_1) = \frac{g(\beta) - g(\alpha)}{\beta - \alpha} \stackrel{(1)}{=} \frac{\ln f(\beta) - \ln f(\alpha)}{\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \ln \frac{f(\beta)}{f(\alpha)} \quad (4)$$

$$\bullet \quad x_2 \in (\beta, \gamma) \text{ τέτοιο, ώστε } g'(x_2) = \frac{g(\gamma) - g(\beta)}{\gamma - \beta} \stackrel{(1)}{=} \frac{\ln f(\gamma) - \ln f(\beta)}{\omega} = \frac{1}{\omega} \cdot \ln \frac{f(\gamma)}{f(\beta)} \quad (5)$$

Από τις σχέσεις (3), (4), (5) έχουμε:

$$g'(x_1) = g'(x_2) \Rightarrow \frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \frac{f'(x_2)}{f(x_2)} \Rightarrow f(x_2) \cdot f'(x_1) = f(x_1) \cdot f'(x_2)$$

II) Η συνάρτηση  $g'$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[x_1, x_2]$  με :

$$g''(x) = \left( \frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{f''(x) \cdot f(x) - (f'(x))^2}{(f(x))^2} \quad (6)$$

και  $g'(x_1) = g'(x_2)$ , επομένως η συνάρτηση  $g'$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $[x_1, x_2]$ , άρα θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (x_1, x_2)$  τέτοιο, ώστε  $g''(\xi) = 0$ .  
Οπότε από τη σχέση (6) έχουμε:

$$\frac{f''(\xi) \cdot f(\xi) - (f'(\xi))^2}{(f(\xi))^2} = 0 \Rightarrow$$

$$f''(\xi) \cdot f(\xi) - (f'(\xi))^2 = 0 \Rightarrow$$

$$f''(\xi) \cdot f(\xi) = (f'(\xi))^2$$

**ΘΕΜΑ 12ο : (21ο – 2014):**

Έστω οι συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(0) = 2e$ , οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$2f(x) + f(1-y) + g(x) - g(y) = 2e^x + e^y + 3 \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1 \quad \text{και} \quad g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2$$

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις  $f, g$  και  $f-g$

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις  $C_f, C_g$  των συναρτήσεων  $f, g$  αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

δ) Να λύσετε την ανίσωση:

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3}$$

**ΛΥΣΗ**

α) Για  $y = x$  από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2f(x) + f(1-x) = 3e^x + 3 \quad (2)$$

Αν στη σχέση (2) θέσουμε όπου  $x$  το  $1-x$  έχουμε:

$$2f(1-x) + f(x) = 3e^{1-x} + 3 \quad (3)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (2) και (3)

$$\begin{cases} 2f(x) + f(1-x) = 3e^x + 3 \\ f(x) + 2f(1-x) = 3e^{1-x} + 3 \end{cases} \xrightarrow{\cdot (-2)} \begin{cases} -4f(x) - 2f(1-x) = -6e^x - 6 \\ f(x) + 2f(1-x) = 3e^{1-x} + 3 \end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε:

$$-3f(x) = -6e^x + 3e^{1-x} - 3 \Rightarrow f(x) = 2e^x - e^{1-x} + 1 \quad (4)$$

Για  $y = 0$  από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2f(x) + f(1) + g(x) - g(0) = 2e^x + 4 \stackrel{(4)}{\Rightarrow}$$

$$4e^x - 2e^{1-x} + 2 + f(1) + g(x) - g(0) = 2e^x + 4$$

Είναι:

$$f(1) = 2e = g(0)$$

οπότε έχουμε:

$$g(x) = -2e^x + 2e^{1-x} + 2$$

β) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

- $f'(x) = 2e^x - e^{1-x}(1-x)' = 2e^x + e^{1-x} > 0$ , οπότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$
- $g'(x) = -2e^x + 2e^{1-x}(1-x)' = -2e^x - 2e^{1-x} < 0$ , οπότε η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$

Επίσης για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2e^x - e^{1-x} + 1) - (-2e^x + 2e^{1-x} + 2) = 4e^x - 3e^{1-x} - 1 \quad \text{και}$$

$$(f-g)'(x) = 4e^x - 3e^{1-x}(1-x)' = 4e^x + 3e^{1-x} > 0, \text{ οπότε η } f-g \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } \mathbb{R}$$

Επομένως οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  και  $f-g$  δεν παρουσιάζουν ακρότατα.

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^x - 3e^{1-x} - 1 = 0$$

έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) - g(x) = 4e^x - 3e^{1-x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

- Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο διάστημα  $[0, 1]$ ,
- $h(0) \cdot h(1) = (3 - 3e)(4e - 4) = -12(e - 1)^2 < 0$

Επομένως ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano στο διάστημα  $[0, 1]$ , οπότε η εξίσωση  $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(x)$  έχει μια πραγματική ρίζα  $x_0 \in (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$  και μάλιστα μοναδική, αφού η συνάρτηση  $h = f - g$  είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$ ,  $C_g$  των συναρτήσεων  $f$ ,  $g$  αντίστοιχα, έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.



δ) Είναι:

$$4e^{x^2-2x} < 4e^{x-2} + 3e^{-x^2+2x+1} - 3e^{-x+3} \Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x} - 3e^{-x^2+2x+1} < 4e^{x-2} - 3e^{-x+3} \Leftrightarrow$$

$$4e^{x^2-2x} - 3e^{-x^2+2x+1} - 1 < 4e^{x-2} - 3e^{-x+3} - 1 \Leftrightarrow$$

$$h(x^2 - 2x) < h(x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 2x < x - 2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2)$$

### ΘΕΜΑ 13ο : (23ο – 2014):

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2 \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

α)  $f^2(x) = x^4, x \in \mathbb{R}$  και  $f(x) + f(-x) = 2x^2, x \in \mathbb{R}$

β)  $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$

γ)  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{e^x + 1} dx = \frac{1}{3}$

### ΛΥΣΗ

α) 1ος τρόπος

Για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f(x^2 + y) + f(f(x) - y) = 2f(f(x)) + 2y^2 \quad (1)$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε  $y = -x^2$  έχουμε:

$$f(0) + f(f(x) + x^2) = 2f(f(x)) + 2x^4 \quad (2)$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε  $y = f(x)$  έχουμε:

$$f(x^2 + f(x)) + f(0) = 2f(f(x)) + 2f^2(x) \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} 2f(f(x)) + 2x^4 &= 2f(f(x)) + 2f^2(x) \Leftrightarrow \\ f^2(x) &= x^4 \end{aligned} \quad (4)$$

Για  $x = 0$  από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f^2(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Αν στη σχέση (1) θέσουμε  $x = 0$  έχουμε:

$$\begin{aligned} f(0 + y) + f(f(0) - y) &= 2f(f(0)) + 2y^2 \Leftrightarrow \\ f(y) + f(-y) &= 2y^2 \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει:

$$f(x) + f(-x) = 2x^2, \quad x \in \mathbb{R} \quad (5)$$

**2ος τρόπος**

Για  $x = y = 0$  από την αρχική σχέση έχουμε:

$$f(0) + f(f(0)) = 2f(f(0)) \Rightarrow f(f(0)) = f(0) \quad (6)$$

Για  $x = 0$  και  $y = f(0)$  από την αρχική σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} f(f(0)) + f(f(0) - f(0)) &= 2f(f(0)) + 2f^2(0) \Rightarrow \\ f(0) &= f(f(0)) + 2f^2(0) \stackrel{(6)}{\Rightarrow} 2f^2(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \end{aligned}$$

Για  $x = 0$  από την αρχική σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} f(y) + f(f(0) - y) &= 2f(f(0)) + 2y^2 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} \\ f(y) + f(-y) &= 2y^2, \quad y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει:

$$f(x) + f(-x) = 2x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για  $y = -x^2$  από την αρχική σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x^2 - x^2) + f(f(x) + x^2) &= 2f(f(x)) + 2x^4 \\ f(0) + f(f(x) + x^2) &= 2f(f(x)) + 2x^4 \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} \\ f(f(x) + x^2) &= 2f(f(x)) + 2x^4 \quad (7) \end{aligned}$$

Για  $y = f(x)$  από την αρχική σχέση έχουμε:

$$\begin{aligned} f(x^2 + f(x)) + f(f(x) - f(x)) &= 2f(f(x)) + 2f^2(x) \Rightarrow \\ f(x^2 + f(x)) + f(0) &= 2f(f(x)) + 2f^2(x) \stackrel{f(0)=0}{\Rightarrow} \\ f(f(x) + x^2) &= 2f(f(x)) + 2f^2(x) \quad (8) \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (7) και (8) προκύπτει ότι:

$$2f^2(x) = 2x^4 \Rightarrow f^2(x) = x^4$$

**β) 1ος τρόπος**

Έστω  $x_0 \in \mathbb{R}$ , τότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f^2(x_0) = x_0^4 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0^2 \quad \text{ή} \quad f(x_0) = -x_0^2 \quad (9)$$

Υποθέτουμε ότι υπάρχει  $x_0 \in \mathbb{R}^*$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = -x_0^2$

Από τη σχέση (5) έχουμε:

$$f(x_0) + f(-x_0) = 2x_0^2 \Rightarrow -x_0^2 + f(-x_0) = 2x_0^2 \Rightarrow f(-x_0) = 3x_0^2$$

Αν υψώσουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης έχουμε:

$$[f(-x_0)]^2 = 9x_0^4 \Rightarrow x_0^4 = 9x_0^4 \Rightarrow 1 = 9, \text{ που είναι άτοπο.}$$

Άρα από τη σχέση (9) προκύπτει ότι για κάθε  $x \neq 0$  είναι  $f(x) = x^2$

Όμως  $f(0) = 0$ , οπότε  $f(x) = x^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Η συνάρτηση αυτή είναι δεκτή, διότι επαληθεύει τη δοσμένη συνθήκη.

**2ος τρόπος**

Αν στη σχέση (4) θέσουμε όπου  $x$  το  $-x$  έχουμε:

$$f^2(-x) = (-x)^4 \Rightarrow f^2(-x) = x^4, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f^2(x) = f^2(-x) = x^4 \Rightarrow$$

$$(f(x) + f(-x)) \cdot (f(x) - f(-x)) = 0 \Rightarrow^{(5)}$$

$$2x^2(f(x) - f(-x)) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Επομένως για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι:

$$f(x) - f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) = f(-x) \quad (10)$$

Από τις σχέσεις (5) και (10) προκύπτει ότι:

$$2f(x) = 2x^2 \Rightarrow f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}^* \quad (11)$$

Από τη σχέση (11) και δεδομένου ότι  $f(0) = 0$  έχουμε τελικά:

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

γ) Έστω  $I = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{e^x + 1} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$ . Αν θέσουμε  $x = -u$ , τότε  $dx = (-u)' du = -du$

Για  $x = -1$  είναι  $u = 1$  και για  $x = 1$  είναι  $u = -1$ , οπότε έχουμε:

$$I = \int_1^{-1} \frac{(-u)^2}{e^{-u} + 1} (-du) = - \int_1^{-1} \frac{u^2}{e^{-u} + 1} du = \int_{-1}^1 \frac{u^2}{e^{-u} + 1} du = \int_{-1}^1 \frac{u^2 e^u}{1 + e^u} du = \int_{-1}^1 \frac{x^2 e^x}{1 + e^x} dx = J$$

Είναι:

$$\blacklozenge \quad I = J \quad \text{και}$$

$$\blacklozenge \quad I + J = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + e^x} dx + \int_{-1}^1 \frac{x^2 e^x}{1 + e^x} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2 + x^2 e^x}{1 + e^x} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2(1 + e^x)}{1 + e^x} dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}$$

Επομένως έχουμε:

$$2I = \frac{2}{3}, \quad \text{οπότε} \quad I = \frac{1}{3}$$

**ΘΕΜΑ 15ο : (24ο – 2014):**

Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = (a+1)^x - a^x$ ,  $a > 1$

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης  $f$ , για τις διάφορες τιμές του  $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα στο διάστημα  $[0, +\infty)$

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$

δ) Να λύσετε το σύστημα  $3^x - 2^y = 3^y - 2^x = 19$

## ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$$\alpha + 1 > \alpha > 1$$

Οπότε:

- Για  $x > 0$  είναι  $(\alpha + 1)^x > \alpha^x \Rightarrow (\alpha + 1)^x - \alpha^x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$   
Άρα  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$
- Για  $x < 0$  είναι  $(\alpha + 1)^x < \alpha^x \Rightarrow (\alpha + 1)^x - \alpha^x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$   
Άρα  $f(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$
- Για  $x = 0$  είναι  $f(0) = (\alpha + 1)^0 - \alpha^0 = 1 - 1 = 0$   
Άρα  $f(x) = 0$  για  $x = 0$

β) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f'(x) = (\alpha + 1)^x \ln(\alpha + 1) - \alpha^x \ln \alpha$$

και

$$f''(x) = (\alpha + 1)^x \ln^2(\alpha + 1) - \alpha^x \ln^2 \alpha$$

Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)^x > \alpha^x \quad (1)$$

Επειδή  $\alpha > 1$  είναι:

$$\ln(\alpha + 1) > \ln \alpha > 0 \quad (2)$$

και

$$\ln^2(\alpha + 1) > \ln^2 \alpha > 0 \quad (3)$$

οπότε:

- με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (2) βρίσκουμε ότι:  
 $(\alpha + 1)^x \ln(\alpha + 1) > \alpha^x \ln \alpha \Rightarrow (\alpha + 1)^x \ln(\alpha + 1) - \alpha^x \ln \alpha > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$
- με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των ανισοτήτων (1) και (3) βρίσκουμε ότι:  
 $(\alpha + 1)^x \ln^2(\alpha + 1) > \alpha^x \ln^2 \alpha \Rightarrow (\alpha + 1)^x \ln^2(\alpha + 1) - \alpha^x \ln^2 \alpha > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

Δεδομένου ότι συνάρτηση  $f$  είναι και συνεχής στο  $x_0 = 0$ , συμπεραίνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο  $[0, +\infty)$

γ) Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , η  $C_f$  δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.Για  $x \in (-\infty, 0)$  είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [(\alpha + 1)^x - \alpha^x] = 0 - 0 = 0$$

οπότε η ευθεία  $y = 0$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της  $C_f$  στο  $-\infty$

Για  $x \in (0, +\infty)$  είναι:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\alpha+1)^x - \alpha^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \alpha^x \cdot \left[ \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^x - 1 \right] \right] = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &\stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} [(\alpha+1)^x \ln(\alpha+1) - \alpha^x \ln \alpha] = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \alpha^x \left[ \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^x \ln(\alpha+1) - \ln \alpha \right] \right] = +\infty\end{aligned}$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^x \ln(\alpha+1) \right] = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln \alpha) = \ln \alpha$$

Άρα η  $C_f$  δεν έχει ασύμπτωτη στο  $+\infty$

**δ) 1<sup>ος</sup> τρόπος:**

Αν ένας τουλάχιστον από τους  $x, y$  είναι αρνητικός, τότε ο αριθμός  $3^x - 2^y$  δεν είναι ακέραιος.

Επομένως, αναζητούμε μη αρνητικές λύσεις του συστήματος.

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 3^x - 2^x$ , που προκύπτει από την παραπάνω συνάρτηση για  $\alpha = 2$  Είναι:

$$x > y \Rightarrow \begin{cases} 3^x > 3^y \\ 2^x > 2^y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^x > 3^y \\ -2^y > -2^x \end{cases} \Rightarrow 3^x - 2^y > 3^y - 2^x$$

Ομοίως

$$x < y \Rightarrow 3^x - 2^y < 3^y - 2^x$$

Επομένως, το σύστημα δεν έχει λύσεις  $(x, y)$  με  $x \neq y$

Για  $x = y$  είναι:

$$3^x - 2^x = 19 \Leftrightarrow f(x) = f(3) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} x = 3$$

οπότε το σύστημα έχει τη μοναδική λύση  $(x, y) = (3, 3)$

**2<sup>ος</sup> τρόπος:**

Από τις δοσμένες σχέσεις παίρνουμε:

$$3^x - 2^y = 3^y - 2^x \Leftrightarrow 3^x + 2^x = 3^y + 2^y \Leftrightarrow g(x) = g(y) \quad (4)$$

όπου  $g(x) = 3^x + 2^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$g'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 > 0$$

Άρα η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε είναι και 1-1

Επομένως από τη σχέση (4) έχουμε  $x = y$

Για  $x = y$  το σύστημα γίνεται  $3^x - 2^x = 19 \Leftrightarrow f(x) = f(3) \quad (5)$ , όπου  $f(x) = 3^x - 2^x$

Στο διάστημα  $(-\infty, 0)$  όμως η συνάρτηση είναι αρνητική, οπότε δεν έχουμε αρνητική ρίζα.

Επίσης είναι  $f(0) = 0 \neq 19$ , οπότε ούτε το 0 είναι ρίζα.

Στο διάστημα  $(0, +\infty)$ , με βάση το ερώτημα (β) για  $\alpha = 2$  η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η σχέση (5) δίνει τη μοναδική λύση  $x = 3$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση την  $(x, y) = (3, 3)$

### ΘΕΜΑ 15ο : (25ο – 2014):

Έστω συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f(x+y) = e^{-y} \cdot f(x) + e^{-x} \cdot f(y)$ , για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  (1)
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$  (2)

Θεωρούμε επίσης και την παραγωγίσιμη συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $g'(x^3 + 1) = -x^3 e^{-x^3 - 1}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (3) και
- $g(0) = f(0)$  (4)

Να αποδείξετε ότι:

α) Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = -f(x) + e^{-x}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

β)  $f(x) = x e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

γ)  $f = g$

### ΛΥΣΗ

α) Έστω  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Για  $x$  κοντά στο  $x_0$  θεωρούμε το λόγο μεταβολών  $\lambda(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Θέτουμε  $h = x - x_0$ , δηλαδή  $x = x_0 + h$ , όπου  $h \neq 0$ , διότι  $x \neq x_0$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \lambda(x) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \stackrel{(1)}{=} \frac{e^{-h} \cdot f(x_0) + e^{-x_0} \cdot f(h) - f(x_0)}{h} \\ &= \frac{f(x_0) \cdot (e^{-h} - 1) + e^{-x_0} \cdot f(h)}{h} = f(x_0) \cdot \frac{e^{-h} - 1}{h} + e^{-x_0} \cdot \frac{f(h)}{h} \end{aligned}$$

Είναι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \stackrel{(2)}{=} 1 \quad \text{και} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-h} - 1}{h} \stackrel{-h=t}{=} -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - e^0}{t} = -\left. \frac{d(e^t)}{dt} \right|_{t=0} = -1 \quad (5)$$

Άρα:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( f(x_0) \cdot \frac{e^{-h} - 1}{h} + e^{-x_0} \cdot \frac{f(h)}{h} \right) \stackrel{(2)}{=} \stackrel{(5)}{=}$$

$$= f(x_0) \cdot (-1) + e^{-x_0} \cdot 1 = -f(x_0) + e^{-x_0} \in \mathbb{R}$$

Δηλαδή, η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο τυχαίο  $x_0 \in \mathbb{R}$  με  $f'(x_0) = -f(x_0) + e^{-x_0}$

Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = -f(x) + e^{-x}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

β) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$f'(x) = -f(x) + e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = e^{-x} \Leftrightarrow e^x \cdot (f'(x) + f(x)) = 1 \Leftrightarrow (e^x \cdot f(x))' = (x)'$$

Άρα

$$e^x \cdot f(x) = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Για  $x = 0$  έχουμε:

$$e^0 \cdot f(0) = c \Rightarrow c = 0,$$

διότι από τη σχέση (1) για  $x = y = 0$  έχουμε ότι  $f(0) = 0$

Επομένως:

$$e^x \cdot f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x \cdot e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$g'(x^3 + 1) = -x^3 e^{-x^3 - 1}$$

Θέτουμε  $x^3 + 1 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  και έχουμε:

$$g'(t) = (1 - t)e^{-t}, \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f'(x) = (1 - x)e^{-x}$$

Οπότε

$$f'(x) = g'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f(x) = g(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Από υπόθεση είναι  $f(0) = g(0) = 0$ , οπότε  $c = 0$

Δηλαδή είναι:

$$f(x) = g(x), \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως

$$f = g$$

**ΘΕΜΑ 16ο : (29ο – 2014):**

Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής στο διάστημα  $(0, 1]$  και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $(0, 1)$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1) = 0$  και
- $2\sqrt{1-x} \cdot f'(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x}$ , για κάθε  $x \in (0, 1)$

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln x - \sqrt{1-x}$ ,  $x \in (0, 1]$

β) Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε:

i) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}$

ii) το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot f^{-1}(x))$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  έχει ένα ακριβώς σημείο καμπής  $M(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 \in (0, 1)$

δ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_{f^{-1}}$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  αντιστοίχως στο ίδιο σύστημα αξόνων.

**ΛΥΣΗ**

α) Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $(0, 1]$  και για κάθε  $x \in (0, 1)$ , έχουμε:

$$2\sqrt{1-x} \cdot f'(x) = 1 + \frac{2\sqrt{1-x}}{x} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = (\ln x - \sqrt{1-x})'$$

Άρα για κάθε  $x \in (0, 1)$  είναι:

$$f(x) = \ln x - \sqrt{1-x} + c$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ , οπότε  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Επειδή  $f(1) = 0$  έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x - \sqrt{1-x} + c) = 0 \Rightarrow c = 0$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - \sqrt{1-x} & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x) = \ln x - \sqrt{1-x} \quad , \quad x \in (0, 1]$$



β) Για τη συνάρτηση  $f$  έχουμε:

- ♦ είναι συνεχής στο διάστημα  $(0, 1]$  και
- ♦  $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} > 0$ , για κάθε  $x \in (0, 1)$

Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0, 1]$ , οπότε είναι και «1-1».

Άρα η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται.

i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}$  είναι  $A_{f^{-1}} = f((0, 1])$

Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1]$  θα είναι:

$$f((0, 1]) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 0], \text{ γιατί:}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - \sqrt{1-x}) = -\infty$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x) = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\sqrt{1-x}) = -1$
- $f(1) = 0$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}$  είναι:  $A_{f^{-1}} = (-\infty, 0]$

ii) Είναι:

$$A_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \text{ και } f^{-1}((-\infty, 0]) = A_f = (0, 1]$$

Επομένως για κάθε  $x \in (-\infty, 0]$  ισχύει:

$$0 < f^{-1}(x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < x^2 f^{-1}(x) \leq x^2 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής, συμπεραίνουμε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 f^{-1}(x)] = 0$

γ) Για κάθε  $x \in (0, 1)$  έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{1-x}} \text{ και}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{3}{8(1-x)^2\sqrt{1-x}} > 0$$

Άρα η συνάρτηση  $f''$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1)$  και επειδή είναι και συνεχής στο  $(0, 1)$ , το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f''$  είναι:

$$f''((0, 1)) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f''(x) \right) = (-\infty, +\infty), \text{ γιατί:}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}} \right) = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}} = \frac{1}{4}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}} \right) = +\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{4(1-x)\sqrt{1-x}} \right) = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -1$$

Η συνάρτηση  $f''$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1)$  επομένως είναι και «1-1» και επειδή το  $0 \in f''((0, 1))$  θα υπάρξει ένα ακριβώς  $x_0 \in (0, 1)$  τέτοιο, ώστε  $f''(x_0) = 0$

Επειδή η συνάρτηση  $f''$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, 1)$  θα ισχύει:

- για  $0 < x < x_0 \Rightarrow f''(x) < f''(x_0) \Rightarrow f''(x) < 0$  και
- για  $x_0 < x < 1 \Rightarrow f''(x_0) < f''(x) \Rightarrow f''(x) > 0$

Άρα το σημείο  $M(x_0, f(x_0))$  με  $x_0 \in (0, 1)$  είναι το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$

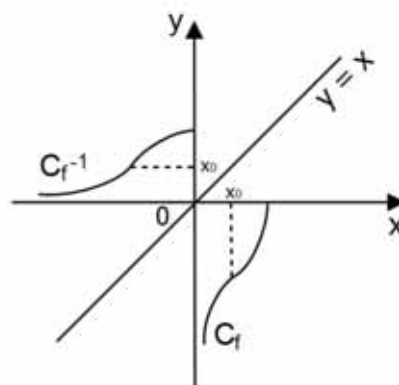
δ) Έχουμε:

$$A_f = (0, 1] \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

άρα η ευθεία  $(\varepsilon_1): x = 0$  είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$

Συμπληρώνουμε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης  $f$  και σχεδιάζουμε την  $C_f$

| x        | 0 | $x_0$ | 1 |
|----------|---|-------|---|
| $f'(x)$  |   | +     | + |
| $f''(x)$ |   | -     | + |
| f        |   | Σ.Κ.  |   |



### ΘΕΜΑ 17ο : (30ο – 2014):

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'(0) = 0$ , για την οποία ισχύουν:

- $f(x) + x \neq 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  (1)
- $f(x-y) = \frac{f(x)+x}{f(y)+y} - x + y$ , για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  (2)

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύουν:

- i)  $f'(x) = f(x) + x - 1$
- ii)  $f(x) = e^x - x$

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του  $a$ , ώστε να ισχύει:

$$f(x) \geq ax \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } a > -1$$

γ) Αν  $H(x) = xe^x - e^x + 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , τότε να βρείτε συνάρτηση  $G$ , η οποία να είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και για την οποία ισχύει:

$$G'(x) + \frac{2G(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Είναι η συνάρτηση  $G$  παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$ ;

## ΛΥΣΗ

α) i) Για  $x = y = 0$  από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f(0-0) = \frac{f(0)+0}{f(0)+0} - 0 + 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(0) = 1 \quad (3)$$

Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (2) ως προς  $y$ , θεωρώντας το  $x$  σταθερά, έχουμε:

$$f'(x-y) \cdot (0-1) = \frac{-(f(x)+x) \cdot (f'(y)+1)}{(f(y)+y)^2} - 0 + 1 \Rightarrow$$

$$f'(x-y) = \frac{(f(x)+x) \cdot (f'(y)+1)}{(f(y)+y)^2} - 1$$

Για  $y = 0$  από την τελευταία σχέση έχουμε:

$$f'(x) = \frac{(f(x)+x) \cdot (f'(0)+1)}{(f(0)+0)^2} - 1 \stackrel{(3)}{\Rightarrow}$$

$$f'(x) = \frac{(f(x)+x) \cdot (0+1)}{(1+0)^2} - 1 \Rightarrow$$

$$f'(x) = f(x) + x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

ii) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f'(x) = f(x) + x - 1 \Leftrightarrow f'(x) + 1 = f(x) + x \Leftrightarrow$$

$$(f(x) + x)' = f(x) + x \Leftrightarrow f(x) + x = ce^x \quad (4)$$

Για  $x = 0$  από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0) + 0 = ce^0 \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} c = 1$$

Για  $c = 1$  από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(x) + x = e^x \Leftrightarrow f(x) = e^x - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

β) Για  $\alpha > -1$  και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f(x) \geq \alpha x \Leftrightarrow e^x - x \geq \alpha x \Leftrightarrow e^x - x - \alpha x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \quad (5),$$

όπου  $g(x) = e^x - x - \alpha x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $\alpha > -1$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$g'(x) = e^x - 1 - \alpha, \text{ όπου } \alpha > -1$$

Έχουμε:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 + \alpha \Leftrightarrow x = \ln(1 + \alpha)$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 + \alpha \Leftrightarrow x > \ln(1 + \alpha)$

Το πρόσημο της  $g'(x)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $g$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$     | $-\infty$ | $\ln(1+\alpha)$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------------|-----------|
| $g'(x)$ | -         | 0               | +         |
| $g(x)$  | ↘         |                 | ↗         |

ελάχιστο

Η συνάρτηση  $g$  παίρνει ελάχιστη τιμή:

$$\begin{aligned} g(\ln(1+\alpha)) &= e^{\ln(1+\alpha)} - \ln(1+\alpha) - \alpha \ln(1+\alpha) = \\ &= (1+\alpha) - (1+\alpha) \ln(1+\alpha) = (1+\alpha)(1-\ln(1+\alpha)) \end{aligned}$$

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$g(x) \geq (1+\alpha)(1-\ln(1+\alpha))$$

Για να είναι  $g(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , αρκεί να ισχύει:

$$(1+\alpha)(1-\ln(1+\alpha)) \geq 0, \text{ όπου } \alpha > -1$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} (1+\alpha)(1-\ln(1+\alpha)) &\geq 0 \stackrel{1+\alpha>0}{\Leftrightarrow} 1-\ln(1+\alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \\ \ln(1+\alpha) &\leq 1 \Leftrightarrow \ln(1+\alpha) \leq \ln e \Leftrightarrow 1+\alpha \leq e \Leftrightarrow \alpha \leq e-1 \end{aligned}$$

Άρα η μέγιστη τιμή του  $\alpha$  είναι  $\alpha = e-1$

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι:

$$\begin{aligned} G'(x) + \frac{2G(x)}{x} &= \frac{f(x)}{x} + 1 \Leftrightarrow \\ x^2 G'(x) + 2xG(x) &= xf(x) + x^2 \quad (6) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση  $H$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως αρχική της συνεχούς στο  $\mathbb{R}$  συνάρτησης  $tf(t) + t^2$  με:

$$H'(x) = xf(x) + x^2 \quad (7)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) έχουμε:

$$\begin{aligned} x^2 G'(x) + 2xG(x) &= H'(x) \Leftrightarrow \\ (x^2 G(x))' &= H'(x), \quad x \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

♦ Για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$  είναι:

$$x^2 G(x) = H(x) + c_1 \Leftrightarrow x^2 G(x) = xe^x - e^x + 1 + c_1 \quad (8)$$

♦ Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι:

$$x^2 G(x) = H(x) + c_2 \Leftrightarrow x^2 G(x) = xe^x - e^x + 1 + c_2 \quad (9)$$

Επειδή η συνάρτηση  $G$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \circ \lim_{x \rightarrow 0^-} G(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (x e^x - e^x + 1 + c_1) \Rightarrow 0 \cdot G(0) = 0 - 1 + 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = 0 \\ \circ \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x e^x - e^x + 1 + c_2) \Rightarrow 0 \cdot G(0) = 0 - 1 + 1 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι:

$$x^2 G(x) = x e^x - e^x + 1 \Rightarrow G(x) = \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

Επομένως για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ G(0), & x = 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση  $G$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , οπότε:

$$G(0) = \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x e^x - e^x}{2x} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x e^x - e^x + 1}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

Για  $x \neq 0$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x e^x - e^x + 1}{x^2} - \frac{1}{2}}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^x - 2e^x + 2 - x^2}{2x^3} \stackrel{\text{D.L.H}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + 2x e^x - 2e^x - 2x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x e^x - 2x}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(e^x - 1)}{6x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{e^x - 1}{x} \right) = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{d(e^x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1$$

Άρα η συνάρτηση  $G$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  με  $G'(0) = \frac{1}{3}$

**ΘΕΜΑ 18ο : (31ο – 2014):**

Έστω δύο πραγματικοί αριθμοί  $\alpha, \beta$  με  $\alpha < \beta$ , μία συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) > 0$  για

κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \int_{\alpha}^{\beta} (x^2 + 1)f(t)dt - xe^{x^2+1}$

Αν ισχύει:

$$\left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right)^x \geq x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

τότε:

α) Να αποδείξετε ότι  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = e$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $g$  ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $g(x) = 0$  έχει μοναδική θετική ρίζα  $x_0$ , για την οποία ισχύει:

$$\frac{2x_0^3 + 6x_0}{3} > e^{x_0^2} - 1$$

**ΛΥΣΗ**

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi(x) = \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right)^x - x - 1$

Παρατηρούμε ότι  $\varphi(x) \geq \varphi(0)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε η συνάρτηση  $\varphi$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο εσωτερικό σημείο  $x_1 = 0$  του πεδίου ορισμού της.

Επίσης η συνάρτηση  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμη ως πράξη μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων με:

$$\varphi'(x) = \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right)^x \ln \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right) - 1$$

Ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Fermat, οπότε έχουμε:

$$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right)^0 \ln \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\ln \left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right) = 1 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = e \quad (1)$$

β) Από (α) ερώτημα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = e$$

Άρα

$$g(x) = (x^2 + 1)e - xe^{x^2+1}$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2ex - \left( (x)'e^{x^2+1} + xe^{x^2+1}(x^2+1)' \right) = \\ &= 2ex - e^{x^2+1} - 2x^2e^{x^2+1} = \\ &= -e \cdot \left( (2x^2+1)e^{x^2} - 2x \right) \end{aligned}$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

- $x^2+1 \geq 2x$  με το «ίσον» να ισχύει μόνο για  $x=1$
- $x^2 \geq 0$  με το «ίσον» να ισχύει μόνο για  $x=0$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε  $2x^2+1 > 2x$  (2)

Επίσης είναι:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} > e^0 \Rightarrow e^{x^2} > 1 \quad (3)$$

Για  $x > 0$ , αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$\begin{aligned} (2x^2+1) \cdot e^{x^2} &> 2x \cdot 1 \Rightarrow (2x^2+1) \cdot e^{x^2} - 2x > 0 \quad \cdot (-e) < 0 \Rightarrow \\ &-e \cdot \left( (2x^2+1)e^{x^2} - 2x \right) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0, \quad x > 0 \end{aligned}$$

Για  $x \leq 0$  προφανώς ισχύει  $g'(x) < 0$ . Άρα  $g'(x) < 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Επομένως η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$

Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$g(\mathbb{R}) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) \right)$$

Είναι:

$$\blacklozenge \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( ex^2 + e - xe^{x^2+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left( e + \frac{e}{x^2} - \frac{e^{x^2+1}}{x} \right) = -\infty, \text{ διότι}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2+1}}{x} \stackrel{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \stackrel{\text{D.L.H}}{\lim_{x \rightarrow +\infty}} \left( 2xe^{x^2+1} \right) = +\infty$$

$$\blacklozenge \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( ex^2 + e - xe^{x^2+1} \right) = +\infty$$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $g$  είναι το  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$  και έχει σύνολο τιμών το  $\mathbb{R}$ , άρα θα υπάρχει μοναδικό  $x_0$  τέτοιο, ώστε  $g(x_0) = 0$

- Για  $x < x_0 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) > g(x_0) \Rightarrow g(x) > 0$
- Για  $x > x_0 \stackrel{g \searrow}{\Rightarrow} g(x) < g(x_0) \Rightarrow g(x) < 0$

Το πρόσημο της συνάρτησης  $g$  φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

| $x$    | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|-------|-----------|
| $g(x)$ | $+$       | $0$   | $-$       |

Επειδή  $g(0) = e > 0$ , συμπεραίνουμε ότι  $0 \in (-\infty, x_0)$ . Άρα  $x_0 > 0$

Για κάθε  $x \in [0, x_0]$  είναι  $g(x) \geq 0$  με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν  $x = x_0$ , επομένως

$$\int_0^{x_0} g(x) dx > 0 \Rightarrow \int_0^{x_0} (ex^2 + e - xe^{x^2+1}) dx > 0 \Rightarrow$$

$$e \int_0^{x_0} x^2 dx + \int_0^{x_0} e dx - \int_0^{x_0} xe^{x^2+1} dx > 0 \Rightarrow$$

$$e \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{x_0} + e(x_0 - 0) - \frac{1}{2} \int_0^{x_0} (e^{x^2+1})' dx > 0 \Rightarrow$$

$$e \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{x_0} + e(x_0 - 0) - \frac{1}{2} [e^{x^2+1}]_0^{x_0} > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{ex_0^3}{3} + ex_0 - \frac{1}{2}(e^{x_0^2+1} - e) > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{x_0^3}{3} + x_0 > \frac{1}{2}(e^{x_0^2} - 1) \Rightarrow$$

$$\frac{2x_0^3 + 6x_0}{3} > e^{x_0^2} - 1$$

### ΘΕΜΑ 19ο : (34ο – 2014):

Έστω η συνάρτηση  $f: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(2) = 0$ , η οποία είναι συνεχής στο  $[2, +\infty)$  και κυρτή στο  $(2, +\infty)$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = \frac{f(x)}{x-2}$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(2, +\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $(2x-9)f(x+6) = (7x-32)f(x)$ , έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(4, 5)$

Αν επιπλέον ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) + \sqrt{x+6}}{x-3} = \frac{1}{6}$

γ) i) Να βρείτε τις τιμές των  $f(3)$  και  $f'(3)$

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$



## ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $(2, +\infty)$ , οπότε είναι παραγωγίσιμη με  $f'$  γνησίως αύξουσα στο  $(2, +\infty)$ , άρα η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(2, +\infty)$  και  $g'(x) = \frac{f'(x)(x-2) - f(x)}{(x-2)^2}$  (1)

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[2, x]$  και παραγωγίσιμη στο  $(2, x)$ , οπότε ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, επομένως θα υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (2, x)$  τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{f(x)}{x - 2}$$

Είναι:

$$2 < \xi < x \xRightarrow{f' \nearrow} f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x-2} < f'(x) \xRightarrow{x>2} f'(x)(x-2) - f(x) > 0 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι  $g'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (2, +\infty)$ , οπότε η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(2, +\infty)$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$h(x) = (2x-9)f(x+6) - (7x-32)f(x), \quad x \in [4, 5]$$

Η  $h$  συνεχής στο  $[4, 5]$  ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

$$\circ \quad h(4) = -f(10) + 4f(4) = -8g(10) + 8g(4) = 8(g(4) - g(10))$$

$$\text{Για } 4 < 10 \xRightarrow{g \nearrow} g(4) < g(10) \Rightarrow g(4) - g(10) < 0, \text{ άρα } h(4) < 0$$

$$\circ \quad h(5) = f(11) - 3f(5) = 9g(11) - g(5) = 9(g(11) - g(5))$$

$$\text{Για } 5 < 11 \xRightarrow{g \nearrow} g(5) < g(11) \Rightarrow g(11) - g(5) > 0, \text{ άρα } h(5) > 0$$

$$\text{Συνεπώς } h(4) \cdot h(5) < 0$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, άρα η εξίσωση:

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow (2x-9)f(x+6) = (7x-32)f(x)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(4, 5)$

γ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + \sqrt{x+6}}{x-3}, \text{ για } x \text{ κοντά στο } x_0 = 3$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \varphi(x) = \frac{1}{6}$$

Για  $x$  κοντά στο  $x_0 = 3$  έχουμε:

$$f(x) = \varphi(x)(x-3) - \sqrt{x+6}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\varphi(x)(x-3) - \sqrt{x+6}) = \frac{1}{6} \cdot 0 - \sqrt{9} = -3$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -3$$

Όμως η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο 3, οπότε  $f(3) = -3$

Για  $x$  κοντά στο  $x_0 = 3$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)\varphi(x) - \sqrt{x+6} + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \left( \varphi(x) - \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left( \varphi(x) - \frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left( \varphi(x) - \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left( \varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left( \varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} \right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = 0 \end{aligned}$$

Άρα  $f'(3) = 0$

ii) Η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $(2, +\infty)$ , άρα η συνάρτηση  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(2, +\infty)$ , οπότε έχουμε:

- Για  $2 < x < 3 \Rightarrow f'(x) < f'(3) \Rightarrow f'(x) < 0$
- Για  $x > 3 \Rightarrow f'(x) > f'(3) \Rightarrow f'(x) > 0$

Το πρόσημο της  $f'(x)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$     | 2 | 3  | $+\infty$ |
|---------|---|----|-----------|
| $f'(x)$ | - | 0  | +         |
| $f(x)$  | 0 | -3 | $+\infty$ |

τοπ.μεγ.

ελάχ.

Επομένως:

- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[2, 3]$  και  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (2, 3)$ , οπότε η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[2, 3]$
- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[3, +\infty)$  και  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (3, +\infty)$ , οπότε η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[3, +\infty)$
- Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο  $x_0 = 3$  με ελάχιστη τιμή  $f(3) = -3$
- Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο  $x_1 = 2$  με τιμή  $f(2) = 0$

iii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_f$  στο σημείο  $(4, f(4))$  είναι:

$$y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y = f'(4)(x - 4) + f(4)$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $[2, +\infty)$  άρα  $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq f'(4)(x-4) + f(4)$

Έχουμε  $f'(4) > 0$ , άρα  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(4)(x-4) + f(4)) = +\infty$ , οπότε και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_1 = [2, 3]$ , άρα  $f(\Delta_1) = [-3, 0]$

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_2 = [3, +\infty)$ , άρα  $f(\Delta_2) = [-3, +\infty)$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι:

$$f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-3, +\infty)$$

### ΘΕΜΑ 20ο : (36ο – 2014):

Δίνεται η περιττή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $|f(\alpha) - f(\beta)| \leq \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$  για κάθε  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής.

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $F(0) = 0$  και  $F'(x) = f(x) - x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $F$  είναι κοίλη στο  $\mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι  $F(x) \leq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

δ) Να αποδείξετε ότι  $F(x+1) - F(x) < F'(x) < F(x) - F(x-1)$  για  $x \geq 1$

ε) Αν  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \in \mathbb{R}$  να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x)$

### ΛΥΣΗ

α) Για  $x_0 \in \mathbb{R}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq \frac{1}{2}|x - x_0| \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{2}|x - x_0| &\leq f(x) - f(x_0) \leq \frac{1}{2}|x - x_0| \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{2}|x - x_0| + f(x_0) &\leq f(x) \leq f(x_0) + \frac{1}{2}|x - x_0| \end{aligned}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \left( -\frac{1}{2}|x - x_0| + f(x_0) \right) &= f(x_0) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{1}{2}|x - x_0| + f(x_0) \right) &= f(x_0) \end{aligned}$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , δηλαδή η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο τυχαίο  $x_0 \in \mathbb{R}$ , άρα η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$

β) Είναι:

$$F'(x) = f(x) - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Για  $x_1 < x_2$  έχουμε:

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1) - x_1 - f(x_2) + x_2}{x_1 - x_2} =$$

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - \frac{x_1-x_2}{x_1-x_2} = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - 1$$

Όμως:

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1-x_2| \Leftrightarrow \left| \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leq \frac{1}{2}$$

Επομένως:

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{F'(x_1)-F'(x_2)}{x_1-x_2} < 0 \stackrel{x_1 < x_2}{\Rightarrow} F'(x_1) > F'(x_2)$$

Άρα η συνάρτηση  $F'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε η συνάρτηση  $F$  είναι κοίλη στο  $\mathbb{R}$

γ) Η συνάρτηση  $f$  είναι περιττή στο  $\mathbb{R}$ , άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$-x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

Για  $x = 0$  έχουμε:

$$f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

Είναι:

$$F'(0) = f(0) - 0 = 0$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $C_F$  στο σημείο της  $(0, F(0))$  είναι:

$$y - F(0) = F'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = 0$$

Η συνάρτηση  $F$  είναι κοίλη στο  $\mathbb{R}$ , άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$F(x) \leq y \Leftrightarrow F(x) \leq 0$$

δ) Η συνάρτηση  $F$  είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα  $[x-1, x]$ ,  $[x, x+1]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα  $(x-1, x)$ ,  $(x, x+1)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε θα υπάρχουν:

- ♦  $\xi_1 \in (x-1, x)$  τέτοιο, ώστε  $F'(\xi_1) = \frac{F(x) - F(x-1)}{x - (x-1)} = F(x) - F(x-1)$
- ♦  $\xi_2 \in (x, x+1)$  τέτοιο, ώστε  $F'(\xi_2) = \frac{F(x+1) - F(x)}{(x+1) - x} = F(x+1) - F(x)$

Είναι:

$$x-1 < \xi_1 < x < \xi_2 < x+1 \Rightarrow \xi_1 < x < \xi_2$$

Η συνάρτηση  $F'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $[1, +\infty)$ , οπότε έχουμε:

$$F'(\xi_1) > F'(x) > F'(\xi_2) \Rightarrow$$

$$F(x) - F(x-1) > F'(x) > F(x+1) - F(x)$$

$$F(x+1) - F(x) < F'(x) < F(x) - F(x-1)$$

ε) Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x+1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = \ell \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x-1) = \lim_{u \rightarrow +\infty} F(u) = \ell$$

Άρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x)) = \ell - \ell = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - F(x-1)) = \ell - \ell = 0$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής αξιοποιώντας το ερώτημα (δ) είναι και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x) = 0$$

### ΘΕΜΑ 21ο : (37ο – 2014):

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$x+1 \leq f(x) \leq e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $O(0, f(0))$

β) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2xe^x - x^2e^x - 1}{2x}$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = \frac{6-x}{e^x}$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(0, 1)$

δ) Αν  $\int_{\ell n 3}^{\ell n 8} \left( \sqrt{1+e^t} \left( \int_{\ell n 3}^{\ell n 8} f(t) dt \right) \right) dt = 4 + \ell n \frac{9}{4}$ , να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την  $C_f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x = \ell n 3$  και  $x = \ell n 8$

### ΛΥΣΗ

α) Για  $x = 0$  από τη σχέση (1) έχουμε  $1 \leq f(0) \leq 1$ , άρα  $f(0) = 1$  (2)

Για  $x \neq 0$  έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x) - 1}{x}$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$x+1 \leq f(x) \leq e^x \Leftrightarrow x \leq f(x) - 1 \leq e^x - 1 \quad (3)$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

Αν  $x > 0$  τότε από τη σχέση (3) έχουμε  $1 \leq \frac{f(x) - 1}{x} \leq \frac{e^x - 1}{x}$

Είναι:

$$\begin{aligned} & \circ \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ & \circ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{d(e^x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1 \end{aligned}$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$

Αν  $x < 0$  τότε από τη σχέση (3) έχουμε  $1 \geq \frac{f(x) - 1}{x} \geq \frac{e^x - 1}{x}$

Είναι:

$$\begin{aligned} & \circ \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1 \\ & \circ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{d(e^x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1 \end{aligned}$$

Επομένως από Κριτήριο Παρεμβολής είναι και  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = 1$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 1$  με  $f'(0) = 1$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $O(0, f(0))$  είναι:

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y = x + 1$$

β) Είναι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2xe^x - x^2e^x - 1}{2x} &= \frac{f(x) - 1 - x(2+x)e^x}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{f(x) - 1}{x} - \frac{e^x(2+x)}{2} \right) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $g(x) = e^x f(x) + x - 6$ ,  $x \in [0, 1]$

Η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $[0, 1]$  ως αποτέλεσμα πράξεων μεταξύ συνεχών συναρτήσεων.

Είναι:

$$\begin{aligned} & \circ g(0) = e^0 f(0) + 0 - 6 \stackrel{(2)}{=} 1 - 6 = -5 < 0 \\ & \circ g(1) = e f(1) + 1 - 6 = e f(1) - 5 > 0, \end{aligned}$$

διότι για  $x = 1$  από τη σχέση (1) έχουμε:

$$2 \leq f(1) \leq e \Leftrightarrow 2e \leq e f(1) \leq e^2 \Leftrightarrow 2e - 5 \leq e f(1) - 5 \leq e^2 - 5$$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση  $g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$e^x f(x) + x - 6 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{6 - x}{e^x} \text{ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο } (0, 1)$$

δ) Επειδή  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in [\ln 3, \ln 8]$ , το εμβαδόν του χωρίου  $\Omega$  που περικλείεται από τη γραφική παράσταση  $C_f$  της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες με εξισώσεις  $x = \ln 3$  και  $x = \ln 8$  είναι:

$$E = \int_{\ln 3}^{\ln 8} f(x) dx$$

Έχουμε:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \left( \sqrt{1+e^t} \left( \int_{\ln 3}^{\ln 8} f(t) dt \right) \right) dt = 4 + \ln \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$\int_{\ln 3}^{\ln 8} \left( E \cdot \sqrt{1+e^t} \right) dt = 4 + \ln \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$E \cdot \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^t} dt = 4 + \ln \frac{9}{4} \Leftrightarrow$$

$$E = \frac{4 + \ln \frac{9}{4}}{\int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^t} dt}$$

Έστω:

$$I = \int_{\ln 3}^{\ln 8} \sqrt{1+e^t} dt$$

Θέτουμε:

$$u = \sqrt{1+e^t} \Rightarrow u^2 = 1+e^t$$

Οπότε:

$$2u du = e^t dt \Leftrightarrow dt = \frac{2u}{u^2-1}$$

Για  $t = \ln 3$  είναι  $u = \sqrt{1+e^{\ln 3}} = 2$  και για  $t = \ln 8$  είναι  $u = \sqrt{1+e^{\ln 8}} = 3$

Έχουμε:

$$I = \int_2^3 u \cdot \frac{2u}{u^2-1} du = \int_2^3 \frac{2u^2}{u^2-1} du = \int_2^3 \left( 2 + \frac{2}{u^2-1} \right) du$$

Αναζητούμε πραγματικούς αριθμούς  $A, B$  έτσι, ώστε για κάθε  $u \in (2, 3)$  να ισχύει:

$$\frac{2}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \Leftrightarrow A(u+1) + B(u-1) = 2 \Leftrightarrow$$

$$(A+B)u + A - B = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_2^3 2du + \int_2^3 \frac{2}{u^2-1} du = 2 \cdot (3-2) + \int_2^3 \left( \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \\
 &= 2 + \int_2^3 \frac{1}{u-1} (u-1)' du - \int_2^3 \frac{1}{u+1} (u+1)' du = \\
 &= 2 + \int_2^3 \frac{1}{u-1} (u-1)' du - \int_2^3 \frac{1}{u+1} (u+1)' du = \\
 &= 2 + [\ln|u-1|]_2^3 - [\ln|u+1|]_2^3 = 2 + \ln \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

Οπότε:

$$E = \frac{4 + \ln \frac{9}{4}}{2 + \ln \frac{3}{2}} = \frac{4 + \ln \left( \frac{3}{2} \right)^2}{2 + \ln \frac{3}{2}} = \frac{4 + 2 \ln \frac{3}{2}}{2 + \ln \frac{3}{2}} = \frac{2 \left( 2 + \ln \frac{3}{2} \right)}{2 + \ln \frac{3}{2}} = 2$$

### ΘΕΜΑ 22ο : (38ο – 2014):

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $(3x^2 f^2(x) - 1) f'(x) + x f''(x) = 0$ , για κάθε  $x \neq 0$
- $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  και  $f'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της  $C_f$

γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + f(3x) = f(2x) + f(5x)$

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$  ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι

$$f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha)f(\beta) \text{ για } 1 < \alpha < \beta$$

### ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και  $f(x) \neq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα η  $f$  διατηρεί πρόσημο στο  $\mathbb{R}$  και επειδή  $f(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ , συμπεραίνουμε ότι  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$



Για  $x \neq 0$  έχουμε:

$$(3x^2 f^2(x) - 1) f'(x) + x f''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 f^2(x) f'(x) - f'(x) + x f''(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3x^2 f^2(x) f'(x) = f'(x) - x f''(x) \Leftrightarrow$$

$$3f^2(x) f'(x) = \frac{f'(x) - x f''(x)}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$(f^3(x))' = \left( -\frac{f'(x)}{x} \right)'$$

Για  $x < 0$  έχουμε:

$$f^3(x) = -\frac{f'(x)}{x} + c_1 \Leftrightarrow f'(x) = -x f^3(x) + c_1 x$$

Για  $x > 0$  έχουμε:

$$f^3(x) = -\frac{f'(x)}{x} + c_2 \Leftrightarrow f'(x) = -x f^3(x) + c_2 x$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x f^3(x) + c_1 x) = 0 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x f^3(x) + c_2 x) = 0$$

Επομένως:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

Επειδή η συνάρτηση  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$  ισχύει  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$

Άρα:

$$f'(x) = \begin{cases} -x f^3(x) + c_1 x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x f^3(x) + c_2 x, & x > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και ισχύει:

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \quad (1)$$

Για  $x < 0$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x f^3(x) + c_1 x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-f^3(x) + c_1) = -f^3(0) + c_1 \end{aligned}$$

Για  $x > 0$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x f^3(x) + c_2 x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-f^3(x) + c_2) = -f^3(0) + c_2 \end{aligned}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} \Leftrightarrow$$

$$-f^3(0) + c_1 = -f^3(0) + c_2 \Leftrightarrow c_1 = c_2$$

Για  $x = 1$  έχουμε:

$$f'(1) = -f^3(1) + c_2 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{4} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + c_2 \Rightarrow c_2 = 0, \text{ οπότε και } c_1 = 0$$

Άρα:

$$f'(x) = \begin{cases} -xf^3(x) & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -xf^3(x) & , x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = -xf^3(x), x \in \mathbb{R}$$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f'(x) = -xf^3(x) \Leftrightarrow f^{-3}(x)f'(x) = -x \Leftrightarrow$$

$$f^{-3}(x)f'(x) = -x \Leftrightarrow -2f^{-3}(x)f'(x) = 2x \Leftrightarrow$$

$$(f^{-2}(x))' = (x^2)' \Leftrightarrow \frac{1}{f^2(x)} = x^2 + c$$

Για  $x = 1$  έχουμε:

$$\frac{1}{f^2(1)} = 1 + c \Rightarrow 2 = 1 + c \Rightarrow c = 1$$

Άρα:

$$\frac{1}{f^2(x)} = x^2 + 1 \Leftrightarrow f^2(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \stackrel{f(x) > 0}{\Leftrightarrow} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}, x \in \mathbb{R}$$

**β)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f'(x) = -xf^3(x)$$

Όμως  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$

Το πρόσημο της  $f'(x)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| x       | $-\infty$                                                                           | 0 | $+\infty$                                                                            |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------|
| $f'(x)$ | +                                                                                   | 0 | -                                                                                    |
| $f(x)$  |  | 1 |  |

μέγιστο

Επομένως:

- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $(-\infty, 0]$  και  $f'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, 0)$ , οπότε η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0]$

- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[0, +\infty)$  και  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ , οπότε η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$
- Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο  $x_0 = 0$  με μέγιστη τιμή  $f(0) = 1$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -f^3(x) - x \cdot 3f^2(x)f'(x) = -f^2(x)(f(x) + 3xf'(x)) = \\ &= -f^2(x)(f(x) + 3x(-xf^3(x))) = -f^3(x)(1 - 3x^2f^2(x)) = \\ &= -f^3(x)\left(1 - 3x^2 \cdot \frac{1}{x^2 + 1}\right) = -f^3(x)\left(\frac{1 - 2x^2}{x^2 + 1}\right) = \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot f^3(x) \end{aligned}$$

Όμως  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε:

$$\begin{aligned} \circ \quad f''(x) &= 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \circ \quad f''(x) &> 0 \Leftrightarrow x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ή} \quad x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Το πρόσημο της  $f''(x)$  καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| x      | $-\infty$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $+\infty$            |        |
|--------|-----------|-----------------------|----------------------|----------------------|--------|
| f''(x) | +         | 0                     | -                    | 0                    | +      |
| f(x)   | $\cup$    | $\frac{\sqrt{6}}{3}$  | $\cap$               | $\frac{\sqrt{6}}{3}$ | $\cup$ |
|        |           | $\Sigma.K.$           |                      | $\Sigma.K.$          |        |

Επομένως:

- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  και  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , οπότε η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο διάστημα  $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  και  $f''(x) < 0$  για κάθε  $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , οπότε η συνάρτηση  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
- Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$  και  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ , οπότε η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο διάστημα  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$

- Η  $f''$  μηδενίζεται στο  $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, άρα το σημείο  $A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$
- Η  $f''$  μηδενίζεται στο  $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, άρα το σημείο  $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$  είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$

γ) Προφανής λύση η  $x = 0$

Για  $x < 0$  έχουμε:

$$\begin{cases} x > 2x \\ 3x > 5x \end{cases} \xRightarrow{f \uparrow} \begin{cases} f(x) > f(2x) \\ f(3x) > f(5x) \end{cases} \xRightarrow{(+)} f(x) + f(3x) > f(2x) + f(5x)$$

Για  $x > 0$  έχουμε:

$$\begin{cases} x < 2x \\ 3x < 5x \end{cases} \xRightarrow{f \downarrow} \begin{cases} f(x) > f(2x) \\ f(3x) > f(5x) \end{cases} \xRightarrow{(+)} f(x) + f(3x) > f(2x) + f(5x)$$

Άρα η  $x = 0$  είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

δ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$h(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-x f^3(x)}{f(x)} = -x f^2(x) = -\frac{x}{x^2 + 1}$$

Οπότε:

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{(x^2 + 1) - x \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot f^2(x), \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Όμως  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 1$

Το πρόσημο της  $h'(x)$  καθώς η μονοτονία της συνάρτησης  $h$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| x       | $-\infty$                                                                           | -1 | 1                                                                                   | $+\infty$ |                                                                                     |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $h'(x)$ | +                                                                                   | 0  | -                                                                                   | 0         | +                                                                                   |
| $h(x)$  |  |    |  |           |  |

Επομένως:

- Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $(-\infty, -1]$  και  $h'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (-\infty, -1)$ , οπότε η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-\infty, -1]$

- Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $[-1, 1]$  και  $h'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (-1, 1)$ , οπότε η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[-1, 1]$
- Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $[1, +\infty)$  και  $h'(x) > 0$  για κάθε  $x \in (1, +\infty)$ , οπότε η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $[1, +\infty)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $K(x) = \ln f(x)$ ,  $x > 1$ ,

Για κάθε  $x \in (1, +\infty)$  είναι:

$$K'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = h(x)$$

Η συνάρτηση  $K$  είναι:

- συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα  $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$
- παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα  $\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$

Ικανοποιούνται λοιπόν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, οπότε θα υπάρχουν:

$$\diamond \quad \xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ τέτοιο, ώστε } K'(\xi_1) = \frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - K(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha} = \frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - K(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

$$\diamond \quad \xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right) \text{ τέτοιο, ώστε } K'(\xi_2) = \frac{K(\beta) - K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{K(\beta) - K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Είναι:

$$1 < \xi_1 < \xi_2 \stackrel{\kappa^{\uparrow}}{\Rightarrow} K'(\xi_1) < K'(\xi_2) \Rightarrow \frac{K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - K(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} < \frac{K(\beta) - K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Rightarrow$$

$$K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - K(\alpha) < K(\beta) - K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow 2K\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < K(\alpha) + K(\beta) \Rightarrow$$

$$2\ln f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \ln f(\alpha) + \ln f(\beta) \Rightarrow \ln f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < \ln(f(\alpha)f(\beta)) \Rightarrow$$

$$f^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) < f(\alpha)f(\beta)$$

**ΘΕΜΑ 23ο : (39ο – 2014):**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(1) + f(-1) = 0$  και
- $f'(x) = \sqrt{16 + f^2(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $(f'(x) + f(x))e^{-x}$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$

γ) Αν επιπλέον ισχύει  $f(0) = 0$ , να αποδείξετε ότι  $f(x) = 2(e^x - e^{-x})$ ,  $x \in \mathbb{R}$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και την αντίστροφη συνάρτηση της  $f$

ε) Να αποδείξετε ότι  $\int_0^3 \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4} dx = 3 \ln 2 - 1$

**ΛΥΣΗ**

α) Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , άρα και η συνάρτηση  $\sqrt{16 + f^2(x)}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$

Από υπόθεση είναι  $f'(x) = \sqrt{16 + f^2(x)}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , οπότε η συνάρτηση  $f'$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , άρα η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με:

$$f''(x) = \frac{2f(x)f'(x)}{2\sqrt{16 + f^2(x)}} = \frac{f(x)f'(x)}{f'(x)} = f(x)$$

Άρα:

$$f''(x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Η συνάρτηση

$$g(x) = (f'(x) + f(x))e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , ως πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (f''(x) + f'(x))e^{-x} + (f'(x) + f(x))e^{-x}(-x)' = \\ &= e^{-x}(f''(x) + f'(x) - f'(x) - f(x)) = e^{-x}(f''(x) - f(x)) \stackrel{(1)}{=} 0 \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &\stackrel{(1)}{=} \int_{-1}^1 f''(x) dx = [f'(x)]_{-1}^1 = f'(1) - f'(-1) = \\ &= \sqrt{16 + f^2(1)} - \sqrt{16 + f^2(-1)} = \frac{f^2(1) - f^2(-1)}{\sqrt{16 + f^2(1)} + \sqrt{16 + f^2(-1)}} = \\ &= \frac{(f(1) - f(-1))(f(1) + f(-1))}{\sqrt{16 + f^2(1)} + \sqrt{16 + f^2(-1)}} = 0, \text{ αφού } f(1) + f(-1) = 0 \end{aligned}$$

γ) Η συνάρτηση  $g$  είναι σταθερή στο  $\mathbb{R}$ , άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$g(x) = c \Leftrightarrow (f'(x) + f(x))e^{-x} = c \Leftrightarrow f'(x) + f(x) = ce^x \quad (2)$$

Είναι:

$$f(0) = 0 \quad \text{και} \quad f'(0) = \sqrt{16 + f^2(0)} = \sqrt{16} = 4$$

Για  $x = 0$  από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(0) + f(0) = ce^0 \Leftrightarrow 4 + 0 = c \Leftrightarrow c = 4$$

Οπότε από τη σχέση (2) έχουμε:

$$f'(x) + f(x) = 4e^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (3) με  $e^x$ , οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x)e^x + f(x)e^x &= 4e^{2x} \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = (2e^{2x})' \Leftrightarrow \\ f(x)e^x &= 2e^{2x} + c_1 \Rightarrow f(x) = 2e^x + c_1e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (4) \end{aligned}$$

Για  $x = 0$  από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(0) = 2e^0 + c_1e^0 \Leftrightarrow 0 = 2 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -2$$

Οπότε από τη σχέση (4) έχουμε:

$$f(x) = 2e^x - 2e^{-x} \Leftrightarrow f(x) = 2(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}$$

δ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$f'(x) = 2(e^x + e^{-x}) > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$  και επειδή είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left( \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} [2(e^x - e^{-x})] = -\infty$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2(e^x - e^{-x})] = +\infty$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι  $f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Επειδή η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , θα είναι και "1-1", οπότε αντιστρέφεται.

Αν θέσουμε

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = 2(e^x - e^{-x}) \Leftrightarrow y = 2e^x - \frac{2}{e^x} \Leftrightarrow$$

$$2(e^x)^2 - ye^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \ln \left( \frac{y + \sqrt{y^2 + 16}}{4} \right), \quad y \in \mathbb{R}$$

Άρα:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f^{-1}(x) = \ln \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4} \right)$$

ε) Είναι:

$$I = \int_0^3 \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 16}}{4} dx = \int_0^3 f^{-1}(x) dx$$

Θέτουμε:

$$u = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(u), \text{ οπότε } dx = f'(u) du$$

$$\text{Για } x=0 \text{ είναι } u = f^{-1}(0) \Leftrightarrow u = \ln \frac{0 + \sqrt{16}}{4} = \ln 1 = 0$$

$$\text{Για } x=3 \text{ είναι } u = f^{-1}(3) \Leftrightarrow u = \ln \frac{3 + \sqrt{9+16}}{4} = \ln 2$$

Είναι:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\ln 2} u f'(u) du = [u f(u)]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} f(u) du = \\ &= \ln 2 \cdot f(\ln 2) - \int_0^{\ln 2} \left( 2e^u - 2e^{-u} \right) du = \\ &= \ln 2 \cdot f(\ln 2) - \left[ 2e^u + 2e^{-u} \right]_0^{\ln 2} = \\ &= \ln 2 \cdot f(\ln 2) - \left( 2e^{\ln 2} + \frac{2}{e^{\ln 2}} - 4 \right) = \\ &= 3 \ln 2 - (4 + 1 - 4) = 3 \ln 2 - 1, \end{aligned}$$

αφού:

$$f(\ln 2) = 2e^{\ln 2} + \frac{2}{e^{\ln 2}} = 2 + \frac{2}{2} = 3$$

### ΘΕΜΑ 24ο : (40ο – 2014):

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f'(1) = 1 - \alpha$ ,  $\alpha > 0$  και
- $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \frac{\alpha x}{y}$  για κάθε  $x, y > 0$  (1)

α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln x - \alpha x$ ,  $x > 0$

β) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(e, f(e))$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.



γ) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του  $\alpha$  για την οποία ισχύει  $f(x) \leq 1$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$

δ) Αν  $g(x) = -\frac{1}{\alpha} f(e^{\alpha x})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ , να βρείτε τη τιμή του  $\alpha$  ώστε η ελάχιστη τιμή της  $g$  να γίνεται μέγιστη.

### ΛΥΣΗ

α) Αν παραγωγίσουμε και τα δύο μέλη της σχέσης (1) ως προς  $y$ , θεωρώντας το  $x$  σταθερά, έχουμε:

$$\left( f\left(\frac{x}{y}\right) \right)' = \left( f(x) - f(y) + \alpha x - \alpha y - \frac{\alpha x}{y} \right)' \Leftrightarrow$$

$$f'\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 0 - f'(y) + 0 - \alpha + \frac{\alpha x}{y^2}, \quad y > 0$$

Για  $y = 1$  έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(x)(-x) &= -f'(1) - \alpha + \alpha x \Leftrightarrow \\ -x f'(x) &= -(1 - \alpha) - \alpha + \alpha x \Leftrightarrow \\ x f'(x) &= 1 - \alpha x \Leftrightarrow \\ f'(x) &= \frac{1}{x} - \alpha \Leftrightarrow \\ f'(x) &= (\ln x - \alpha x)' \Leftrightarrow \\ f(x) &= \ln x - \alpha x + c, \quad x > 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Για  $x = y = 1$  από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(1) - f(1) + \alpha - \alpha - \alpha \Leftrightarrow \\ f(1) &= -\alpha \quad (3) \end{aligned}$$

Για  $x = 1$  από τη σχέση (2) έχουμε:

$$\begin{aligned} f(1) &= \ln 1 - \alpha + c \stackrel{(3)}{\Leftrightarrow} \\ -\alpha &= -\alpha + c \Leftrightarrow c = 0 \end{aligned}$$

Επομένως:

$$f(x) = \ln x - \alpha x, \quad x > 0$$

β) Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  έχουμε:

$$f'(x) = (\ln x - \alpha x)' = \frac{1}{x} - \alpha$$

Οπότε:

$$f'(e) = \frac{1}{e} - \alpha$$

Άρα η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(e, f(e))$  είναι:

$$y - f(e) = f'(e)(x - e) \Leftrightarrow$$

$$y - (1 - \alpha e) = \left( \frac{1}{e} - \alpha \right) (x - e) \Leftrightarrow$$

$$y = \left( \frac{1}{e} - \alpha \right) x$$

η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$ , αφού επαληθεύεται για  $x = 0$  και  $y = 0$

γ) Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \alpha = \frac{1 - \alpha x}{x}$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \circ \quad f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 1 - \alpha x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\alpha} \\ \circ \quad f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 - \alpha x > 0 \Leftrightarrow \alpha x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Το πρόσημο της  $f'(x)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| x     | 0 | $\frac{1}{\alpha}$                                                                | $+\infty$         |                                                                                    |
|-------|---|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| f'(x) |   | +                                                                                 | 0                 | -                                                                                  |
| f(x)  |   |  | $-\ln \alpha - 1$ |  |

μέγιστο

Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει μέγιστο στο  $x_0 = \frac{1}{\alpha}$  με μέγιστη τιμή  $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \ln \frac{1}{\alpha} - \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = -\ln \alpha - 1$ , επομένως έχουμε:

$$f(x) \leq -\ln \alpha - 1 \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Για να ισχύει  $f(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  πρέπει και αρκεί

$$-\ln \alpha - 1 \leq 1 \Leftrightarrow \ln \alpha \geq -2 \Leftrightarrow \ln \alpha \geq \ln e^{-2} \Leftrightarrow \alpha \geq \frac{1}{e^2}$$

Άρα η ελάχιστη τιμή του  $\alpha$  ώστε να ισχύει  $f(x) \leq 1$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι  $\alpha = \frac{1}{e^2}$

δ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$g(x) = -\frac{1}{\alpha} f(e^{\alpha x}) = -\frac{1}{\alpha} \cdot (\ln e^{\alpha x} - \alpha e^{\alpha x}) = -\frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha x - \alpha e^{\alpha x}) = e^{\alpha x} - x$$

$$g'(x) = (e^{\alpha x} - x)' = \alpha e^{\alpha x} - 1$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \circ \quad g'(x) = 0 &\Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x} = 1 \Leftrightarrow e^{\alpha x} = \frac{1}{\alpha} \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \ln e^{\alpha x} = \ln \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha x = -\ln \alpha \Leftrightarrow x = -\frac{\ln \alpha}{\alpha} \\ \circ \quad g'(x) > 0 &\Leftrightarrow \alpha e^{\alpha x} > 1 \Leftrightarrow e^{\alpha x} > \frac{1}{\alpha} \stackrel{\alpha > 0}{\Leftrightarrow} \ln e^{\alpha x} > \ln \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha x > -\ln \alpha \Leftrightarrow x > -\frac{\ln \alpha}{\alpha} \end{aligned}$$

Το πρόσημο της  $g'(x)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $g$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$     | $-\infty$  | $-\frac{\ln \alpha}{\alpha}$  | $+\infty$  |
|---------|------------|-------------------------------|------------|
| $g'(x)$ | $-$        | $0$                           | $+$        |
| $g(x)$  | $\nearrow$ | $\frac{1+\ln \alpha}{\alpha}$ | $\nearrow$ |

ελάχιστο

Η συνάρτηση  $g$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = -\frac{\ln \alpha}{\alpha}$  με ελάχιστη τιμή

$$g\left(-\frac{\ln \alpha}{\alpha}\right) = e^{\alpha\left(-\frac{\ln \alpha}{\alpha}\right)} - \left(-\frac{\ln \alpha}{\alpha}\right) = e^{-\ln \alpha} + \frac{\ln \alpha}{\alpha} = \frac{1}{e^{\ln \alpha}} + \frac{\ln \alpha}{\alpha} = \frac{1+\ln \alpha}{\alpha}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$h(\alpha) = \frac{1+\ln \alpha}{\alpha}, \quad \alpha > 0$$

Για κάθε  $\alpha \in (0, +\infty)$  είναι:

$$\begin{aligned} h'(\alpha) &= \frac{(1+\ln \alpha)' \cdot \alpha - 1 \cdot (1+\ln \alpha)}{\alpha^2} = \\ &= \frac{1-1-\ln \alpha}{\alpha^2} = -\frac{\ln \alpha}{\alpha^2} \end{aligned}$$

Είναι:

$$\circ \quad h'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln \alpha}{\alpha^2} = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

$$\circ \quad h'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow -\frac{\ln \alpha}{\alpha^2} > 0 \Leftrightarrow \ln \alpha < 0 \Leftrightarrow 0 < \alpha < 1$$

Το πρόσημο της  $h'(\alpha)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $h$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$          | $0$        | $1$ | $+\infty$  |
|--------------|------------|-----|------------|
| $h'(\alpha)$ | $+$        | $0$ | $-$        |
| $h(\alpha)$  | $\nearrow$ |     | $\searrow$ |

μέγιστο

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η συνάρτηση  $h$  παίρνει μέγιστη τιμή όταν  $\alpha = 1$ , οπότε η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης  $g$  γίνεται μέγιστη όταν  $\alpha = 1$

**ΘΕΜΑ 25ο : (41ο – 2014):**

Έστω η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}^*$  και ικανοποιεί τη σχέση:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

β) Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0 = 0$  και ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση  $y = \frac{1}{2}x + 1$  εφάπτεται της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  στο κοινό της σημείο με τον άξονα  $y'y$

γ) Η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

δ) Η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$

**ΛΥΣΗ**

α) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι:

$$f'(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = e^x \Leftrightarrow$$

$$(xf(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow xf(x) = \begin{cases} e^x + c_1, & x < 0 \\ e^x + c_2, & x > 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα είναι συνεχής και στο  $x_0 = 0$ , οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Είναι:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} (xf(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^x + c_1) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -1 \\ \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} (xf(x)) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + c_2) \Leftrightarrow 0 \cdot f(0) = 1 + c_2 \Leftrightarrow c_2 = -1 \end{aligned}$$

Άρα για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  έχουμε:

$$xf(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , άρα:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = \frac{d(e^x)}{dx} \Big|_{x=0} = 1 \quad (1)$$

Επομένως:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

β) Για κάθε  $x$  κοντά στο  $x_0 = 0$  είναι:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x - 1}{x} \right) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη και στο  $x_0 = 0$  με  $f'(0) = \frac{1}{2}$

Το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης  $C_f$  της συνάρτησης  $f$  με τον άξονα  $y'y$  είναι το  $A(0, f(0))$ , δηλαδή σημείο  $A(0, 1)$

Η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της  $C_f$  στο σημείο  $A$  έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι:

$$f'(x) = \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)' = \frac{e^x x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2},$$

όπου  $g(x) = xe^x - e^x + 1, x \in \mathbb{R}$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$g'(x) = (xe^x - e^x + 1)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

Είναι:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow xe^x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Το πρόσημο της  $g'(x)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $g$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| $x$     | $-\infty$  | $0$ | $+\infty$  |
|---------|------------|-----|------------|
| $g'(x)$ | $-$        | $0$ | $+$        |
| $g(x)$  | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ |

ελάχιστο

Η συνάρτηση  $g$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = 0$  με ελάχιστη τιμή  $g(0) = 0 \cdot e^0 - e^0 + 1 = 0$

Έχουμε:

- ♦ Για  $x < 0 \xrightarrow{g \searrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$
- ♦ Για  $x > 0 \xrightarrow{g \nearrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$

Οπότε είναι:

$$g(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Επειδή  $f'(0) = \frac{1}{2}$  συμπεραίνουμε ότι:

$$f'(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

δ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  είναι:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left( \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \right)' = \frac{(xe^x - e^x + 1)' \cdot x^2 - (xe^x - e^x + 1) \cdot (x^2)'}{x^4} = \\ &= \frac{(e^x + xe^x - e^x) \cdot x^2 - (xe^x - e^x + 1) \cdot 2x}{x^4} = \\ &= \frac{x^3 e^x - 2x^2 e^x + 2xe^x - 2x}{x^4} = \frac{x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3}, \end{aligned}$$

όπου  $h(x) = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι:

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x - 2)' = \\ &= 2xe^x + x^2 e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x = x^2 e^x \end{aligned}$$

Άρα  $h'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  και η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , οπότε η  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$

Όμως  $h(0) = 0 \cdot e^0 - 2 \cdot 0 \cdot e^0 + 2e^0 - 2 = 0$  και η συνάρτηση  $h$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε έχουμε:

- ♦ Για  $x < 0 \xrightarrow{h} h(x) < h(0) \Leftrightarrow h(x) < 0$
- ♦ Για  $x > 0 \xrightarrow{h} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0$

Επομένως

- Αν  $x < 0$  τότε  $f''(x) > 0$ , αφού  $h(x) < 0$  και  $x^3 < 0$
- Αν  $x > 0$  τότε  $f''(x) > 0$ , αφού  $h(x) > 0$  και  $x^3 > 0$

Άρα

$$f''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{D.L.H \ x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x + e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} = f'(0)$$

Οπότε η συνάρτηση  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$

Αφού  $f''(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}^*$  και η συνάρτηση  $f'$  είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ , συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση  $f'$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ , άρα η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$

**ΘΕΜΑ 26ο : (42ο – 2014):**

Έστω οι συναρτήσεις  $f(x) = \alpha \ln x + x + \alpha$  και  $g(x) = \frac{x \ln x}{x + \alpha}$ , όπου  $\alpha > 0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική πραγματική ρίζα  $\rho$

β) Να αποδείξετε ότι  $g(x) \geq -\frac{\rho}{\alpha}$  για κάθε  $x > 0$

γ) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση  $C_g$  της συνάρτησης  $g$  έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $\alpha(x \ln x - \lambda) = \lambda x$ , για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$

**ΛΥΣΗ**

α) Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι:

$$f'(x) = \frac{\alpha}{x} + 1 > 0$$

Επομένως η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  και επειδή είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha \ln x + x + \alpha) = -\infty$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha \ln x) = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \alpha) = \alpha$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha \ln x + x + \alpha) = +\infty$ , αφού  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha \ln x) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \alpha) = +\infty$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$  είναι  $f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Το  $0 \in f(A) = \mathbb{R}$  επομένως θα υπάρχει  $\rho \in A = (0, +\infty)$  και μάλιστα μοναδικό, αφού η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$  τέτοιο, ώστε  $f(\rho) = 0$

β) Είναι:

$$A_g = (0, +\infty), \text{ αφού } x + \alpha > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  έχουμε:

$$g'(x) = \left( \frac{x \ln x}{x + \alpha} \right)' = \frac{(\ln x + 1)(x + \alpha) - x \ln x}{(x + \alpha)^2} = \frac{\alpha \ln x + x + \alpha}{(x + \alpha)^2} = \frac{f(x)}{(x + \alpha)^2} \quad (1)$$

Από το (α) ερώτημα γνωρίζουμε ότι υπάρχει μοναδικό  $\rho \in (0, +\infty)$  τέτοιο, ώστε  $f(\rho) = 0$  και η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(0, +\infty)$ , οπότε:

$$\diamond \text{ Για } 0 < x < \rho \xrightarrow{f \nearrow} f(x) < f(\rho) \Rightarrow f(x) < 0$$

$$\diamond \text{ Για } x > \rho \xrightarrow{f \nearrow} f(x) > f(\rho) \Rightarrow f(x) > 0$$

Από τη σχέση (1) και επειδή  $(x + \alpha)^2 > 0$  για κάθε  $x \in A_g$ , έχουμε:

- $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \rho$
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \rho$   <sup>$x > 0$</sup>
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow x > \rho$

Το πρόσημο της  $g'(x)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $g$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| x       | 0 | $\rho$                                   | $+\infty$ |
|---------|---|------------------------------------------|-----------|
| $g'(x)$ |   | – 0 +                                    |           |
| $g(x)$  |   | $\frac{\rho \ell n \rho}{\rho + \alpha}$ |           |

ελάχιστο

Η συνάρτηση  $g$  παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x_0 = \rho$  με ελάχιστη τιμή  $g(\rho) = \frac{\rho \ell n \rho}{\rho + \alpha}$

Άρα για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  έχουμε:

$$g(x) \geq g(\rho) \Rightarrow g(x) \geq \frac{\rho \ell n \rho}{\rho + \alpha} \quad (2)$$

Όμως  $\rho$  ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ , οπότε ισχύει  $\alpha \ell n \rho + \rho + \alpha = 0 \Leftrightarrow \ell n \rho = -\frac{\rho + \alpha}{\alpha}$  (3)

Η σχέση (2) με βάση τη σχέση (3) γράφεται:

$$g(x) \geq \frac{\rho \cdot \left(-\frac{\rho + \alpha}{\alpha}\right)}{\rho + \alpha} \Rightarrow g(x) \geq -\frac{\rho}{\alpha}, \quad x \in (0, +\infty)$$

γ) Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι:

$$\begin{aligned} g''(x) &= \left( \frac{\alpha \ell n x + x + \alpha}{(x + \alpha)^2} \right)' = \frac{\left( \frac{\alpha}{x} + 1 \right) (x + \alpha)^2 - 2(x + \alpha)(\alpha \ell n x + x + \alpha)}{(x + \alpha)^4} = \\ &= \frac{(x + \alpha)^2 - 2x(\alpha \ell n x + x + \alpha)}{x(x + \alpha)^3} = \frac{\alpha^2 - x^2 - 2x\alpha \ell n x}{x(x + \alpha)^3} = \frac{h(x)}{x(x + \alpha)^3} \end{aligned} \quad (4)$$

όπου  $h(x) = \alpha^2 - x^2 - 2x\alpha \ell n x$ ,  $x > 0$

Για κάθε  $x \in (0, +\infty)$  είναι:

$$h'(x) = -2x - 2\alpha \ell n x - 2\alpha = -2(\alpha \ell n x + x + \alpha) = -2f(x)$$

Είναι:

- $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \rho$
- $h'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \rho$   <sup>$x > 0$</sup>



Το πρόσημο της  $h'(x)$  καθώς η μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης  $h$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| x       | 0 | $\rho$     | $+\infty$  |           |            |
|---------|---|------------|------------|-----------|------------|
| $h'(x)$ |   | +          | 0          | -         |            |
| $h(x)$  |   | $\alpha^2$ | $\nearrow$ | $h(\rho)$ | $\searrow$ |

μέγιστο

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\alpha^2 - x^2 - 2\alpha x \ln x) = \alpha^2$$

Αφού

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) \stackrel{0 \cdot (-\infty)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \quad (5)$$

Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο  $\Delta_1 = (0, \rho]$ , επομένως:

$$h(\Delta_1) = \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), h(\rho) \right] = (\alpha^2, h(\rho)]$$

Αρα για κάθε  $x \in \Delta_1 = (0, \rho]$  είναι:

$$h(\rho) \geq h(x) > \alpha^2 > 0 \quad (6)$$

Επίσης είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\alpha^2 - x^2 - 2\alpha x \ln x) = -\infty$$

Η συνάρτηση  $h$  είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_2 = [\rho, +\infty)$ , επομένως:

$$h(\Delta_2) = \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x), h(\rho) \right] = (-\infty, h(\rho)]$$

Το  $0 \in h(\Delta_2)$  επομένως θα υπάρξει  $x_0 \in \Delta_2 = [\rho, +\infty)$  και μάλιστα μοναδικό, αφού η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta_2 = [\rho, +\infty)$  τέτοιο, ώστε  $h(x_0) = 0$

Έχουμε:

$$\diamond \text{ Για } \rho < x < x_0 \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) > h(x_0) \Rightarrow h(x) > 0 \quad (7)$$

$$\diamond \text{ Για } x > x_0 \stackrel{h \searrow}{\Rightarrow} h(x) < h(x_0) \Rightarrow h(x) < 0 \quad (8)$$

Από τις σχέσεις (6) και (7) για κάθε  $x \in (0, x_0)$  έχουμε:

$$h(x) > 0 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} g''(x) > 0, \text{ αφού } x(x+\alpha)^3 > 0 \text{ για κάθε } x \in A_g = (0, +\infty)$$

Από τη σχέση (8) για κάθε  $x \in (x_0, +\infty)$  έχουμε:

$$h(x) < 0 \stackrel{(4)}{\Rightarrow} g''(x) < 0, \text{ αφού } x(x+\alpha)^3 > 0 \text{ για κάθε } x \in A_g = (0, +\infty)$$

Αφού  $x(x+\alpha)^3 > 0$  για κάθε  $x \in A_g = (0, +\infty)$

Το πρόσημο της  $g''(x)$  καθώς η κυρτότητα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης  $g$  φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

| x        | 0 | $x_0$  |          | $+\infty$ |
|----------|---|--------|----------|-----------|
| $g''(x)$ |   | +      | 0        | -         |
| $g(x)$   |   | $\cup$ | $g(x_0)$ | $\cap$    |

Σ.Κ.

Επομένως η συνάρτηση  $g$  έχει ένα μόνο σημείο καμπής το  $M(x_0, g(x_0))$

δ) Έχουμε:

$$a(x \ln x - \lambda) = \lambda x \Leftrightarrow ax \ln x = \lambda(a + x) \Leftrightarrow \frac{x \ln x}{a + x} = \frac{\lambda}{a} \Leftrightarrow g(x) = \frac{\lambda}{a} \quad (9)$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (9) είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης  $C_g$  της συνάρτησης  $g$  και της ευθείας  $y = \frac{\lambda}{a}$ , η οποία είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$

Από (β) ερώτημα έχουμε:

| x       | 0 | $\rho$ | $+\infty$              |           |
|---------|---|--------|------------------------|-----------|
| $g'(x)$ |   | -      | 0                      | +         |
| $g(x)$  | 0 |        | $-\frac{\rho}{\alpha}$ | $+\infty$ |

ελάχιστο

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{x + a} \stackrel{(5)}{=} \frac{0}{0 + a} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x + a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x \left(1 + \frac{a}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 + \frac{a}{x}} = +\infty$
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- ♦ Αν  $\frac{\lambda}{a} < -\frac{\rho}{a} \stackrel{a>0}{\Leftrightarrow} \lambda < -\rho$ , τότε η εξίσωση (9) είναι αδύνατη.
- ♦ Αν  $\frac{\lambda}{a} = -\frac{\rho}{a} \Leftrightarrow \lambda = -\rho$ , τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα  $\rho_1 = \rho$
- ♦ Αν  $-\frac{\rho}{a} < \frac{\lambda}{a} < 0 \Leftrightarrow -\rho < \lambda < 0$ , τότε η εξίσωση (9) έχει δύο ρίζες  $\rho_1 \in (0, \rho)$  και  $\rho_2 \in (\rho, 1)$
- ♦ Αν  $\frac{\lambda}{a} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ , τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα  $\rho_1 = 1$
- ♦ Αν  $\frac{\lambda}{a} > 0 \stackrel{a>0}{\Leftrightarrow} \lambda > 0$ , τότε η εξίσωση (9) έχει μια μόνο ρίζα  $\rho_1 > 1$