ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

4_20925.

Δίνονται οι ευθείες ε_1: $\lambda x + y = 1$ και ε_2: $x + \lambda y = \lambda^2$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι δύο ευθείες τέμνονται και να γράψετε τις συντεταγμένες του κοινού τους σημείου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 13)

β) Για ποια τιμή του λ οι δύο ευθείες είναι παράλληλες; (Μονάδες 6)

γ) Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\lambda x + \lambda^2 y = \lambda^3$ και $2x + 2\lambda y = \lambda^2 - 1$ είναι παράλληλες. (Μονάδες 6)

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

4_20920

α) Να λύσετε το σύστημα (Σ_1) : $\begin{Bmatrix} xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{Bmatrix}$ (Μονάδες 10)

β) Είναι οι λύσεις του συστήματος (Σ_1) λύσεις και του (Σ_2) : $\begin{Bmatrix} |xy| = 6 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{Bmatrix}$;

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 7)

γ) Είναι οι λύσεις του συστήματος (Σ_2) λύσεις και του (Σ_1);

Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας. (Μονάδες 8)

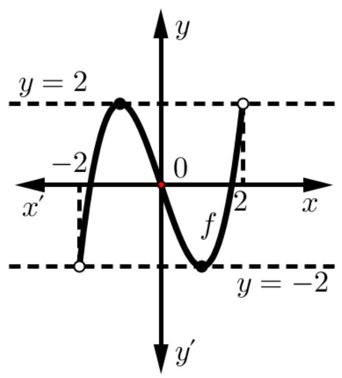
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ-ΑΚΡΟΤΑΤΑ-ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

2_22679

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = x^3 - 3x, x \in (-2, 2)$



α) Είναι η f άρτια ή περιττή; Να αποδείξετε αλγεβρικά τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 7)

β) Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της f, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις θέσεις των ακρότατων της f . (Μονάδες 12)

4_20919

Η περιβαλλοντική ομάδα ενός σχολείου παρέλαβε συρματόπλεγμα μήκους 40m για να περιφράξει, χρησιμοποιώντας όλο το συρματόπλεγμα, έναν ορθογώνιο κήπο για καλλιέργεια λαχανικών. Οι μαθητές της περιβαλλοντικής ομάδας θέλουν να επιλέξουν ένα κήπο που να έχει όσο το δυνατόν μεγαλύτερο εμβαδόν.

α) Να δώσετε τις διαστάσεις τριών διαφορετικών ορθογώνιων κήπων με περίμετρο 40m. Να εξετάσετε αν οι τρεις λαχανόκηποι έχουν το ίδιο εμβαδόν.

(Μονάδες 7)

β) Αν συμβολίσουμε με x το πλάτος και με Ε το εμβαδόν ενός λαχανόκηπου με περίμετρο 40m, να εκφράσετε το Ε ως συνάρτηση του x.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι $E(x) = -(x-10)^2 + 100$. Χρησιμοποιώντας την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2$ να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση της Ε(x). Από τη γραφική παράσταση της Ε(x) να βρείτε τις διαστάσεις του λαχανόκηπου με το μεγαλύτερο εμβαδόν. (Μονάδες 10)

4_22776

Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5dm και 8dm, κόβουμε ίσα τετράγωνα, πλευράς x,από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές του (Σχήμα 1).

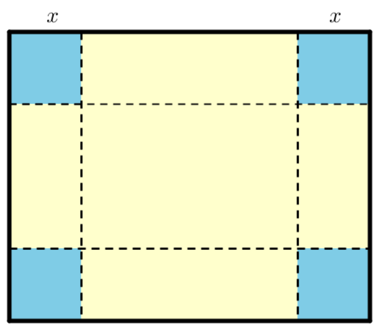
α) Να δείξετε ότι ο όγκος V του κουτιού εκφράζεται ως συνάρτηση του χ με τον τύπο $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει το x στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις διαστάσεις (εκφρασμένες σε dm με ακέραιους αριθμούς) του κουτιού αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι $8dm^3$. (Μονάδες 7)

δ) Στο σχ.2 δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $V(x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x.$ για $x \in (0,\ 2.5)$. Χρησιμοποιώντας το σχήμα να βρείτε ποιος είναι ο μεγαλύτερος όγκος που μπορεί να έχει το κουτί. Στη συνέχεια να υπολογίσετε αλγεβρικά τις διαστάσεις του κουτιού με το μεγαλύτερο όγκο. (Μονάδες 7)



ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

4_20924

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta,\ \alpha, \beta \in R$.

α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία Α(1, 2) και Β(5, 8), να δείξετε ότι $\alpha = \frac{3}{2}$ και $\beta = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 8)

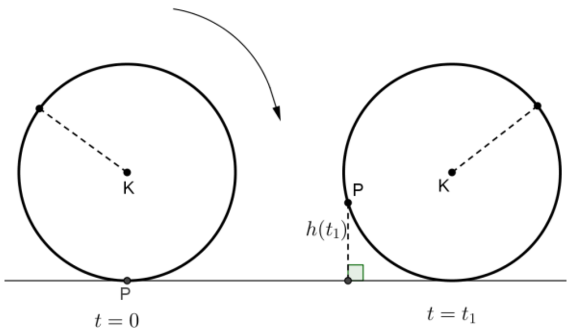
β) Αν g(x) είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά 1 μονάδα προς τα αριστερά και κατακόρυφα κατά 3 μονάδες προς τα κάτω, να βρείτε τον τύπο της g. (Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x) = \frac{3}{2}(x-1)$ είναι η συνάρτηση που προκύπτει από τη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f οριζόντια κατά κ μονάδες προς τα δεξιά και κατακόρυφα κατά $\frac{k}{2}$ μονάδες κάτω, να βρείτε το κ (κ > 0). (Μονάδες 8)

ΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4_20339

Μια ρόδα ποδηλάτου περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της. Σημειώνουμε ένα σημείο P της ρόδας (όπως φαίνεται στο σχήμα), το οποίο τη χρονική στιγμή t = 0, είναι το σημείο επαφής της ρόδας με μια επιφάνεια. Η συνάρτηση που εκφράζει την απόσταση h (σε m) του σημείου P από την επιφάνεια, t sec μετά την αρχή της κίνησης δίνεται από τη σχέση:
$h(t) = -0,2\sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t) + 0,2$, με ω θετική πραγματική σταθερά. Υποθέτουμε ότι το σημείο P κάνει ένα πλήρη κύκλο σε 4sec.



α) Να αποδείξετε ότι $\omega = \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 5)

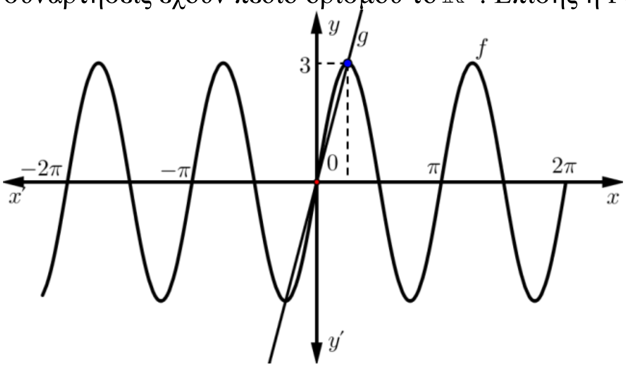
β) Να προσδιορίσετε την απόσταση του P από την επιφάνεια τις στιγμές: t_1 = 1sec, t_2 = 2sec και t_3 = 7sec. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της h. (Μονάδες 5)

δ) Να προσδιορίσετε την ακτίνα της ρόδας. (Μονάδες 9)

4_20921

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g(x)= αx+ β, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και της συνάρτησης f (x) = ρημ(ωx), όπου ω > 0 και ρ > 0. Και οι δύο συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Επίσης η f έχει μέγιστο 3.



α) Να αποδείξετε ότι ρ = 3 και ω = 2 (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα α, β. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε, γραφικά, το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $3\eta\mu\left(2x\right)-\dfrac{12x}{\pi}=0$ στο διάστημα [0, π]. (Μονάδες 10)

4_20922

Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=-2\eta\mu\dfrac{\pi t}{2}+2, t\in[0,4]$

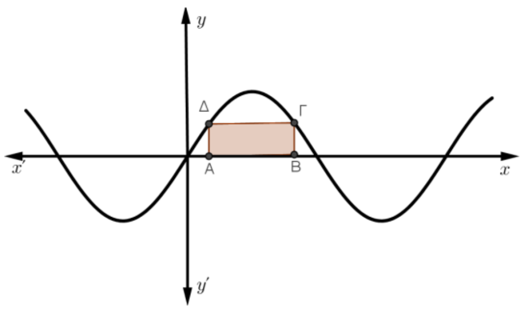
α) Να βρείτε την περίοδο της f. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της, καθώς και τις τιμές του t για τις οποίες η f παίρνει τις τιμές αυτές. (Μονάδες12)

γ) Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 8)

4_22691

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{4}\cdot x\right)$.



α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

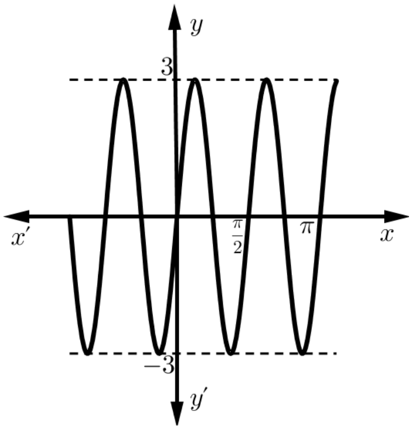
β) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο με $A\left(\dfrac{2}{3},0\right)$. Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου Δ. (Μονάδες 10)

ii. τις συντεταγμένες των σημείων Β και Γ. (Μονάδες 10)

4_22693

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha\eta\mu(\omega x)$ με παραμέτρους α, ω > 0



Να βρείτε:

α) την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

β) τους αριθμούς α και ω (Μονάδες 8)

γ) τους αριθμούς $k \in \mathbb{R}$ για τους οποίους η εξίσωση f (x) = κ έχει μοναδική λύση στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση (Μονάδες 8)

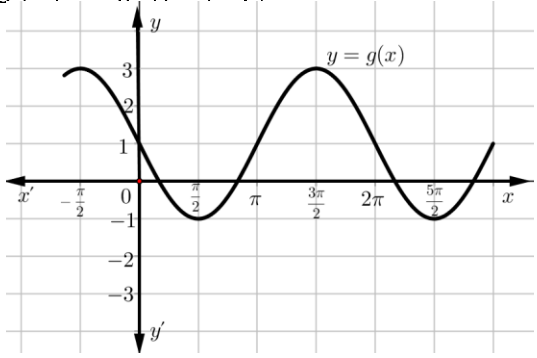
ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4_20923

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu(3x) + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την περίοδο Τ και τη μέγιστη τιμή της f . (Μονάδες 5)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = a\eta\mu(\beta x) + \gamma, x \in \mathbb{R}$



i. Να προσδιορίσετε τα α, β, γ. (Μονάδες 12)

ii. Για α = -2, β = 1 και γ = 1, να λύσετε την εξίσωση f(x) = g(x) στο διάστημα [0, π). (Μονάδες 8)

4_22690

Δίνεται η εξίσωση $1 - \eta\mu x = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$ (Α)

α) Να αποδείξετε ότι, αν x_0 είναι μία λύση της εξίσωσης (Α), τότε $\sigma\upsilon\nu x_0 > 0$. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε την εξίσωση $(1-\eta\mu x)^2 = 3\sigma\upsilon\nu^2 x$ (Β) η οποία προκύπτει υψώνοντας στο τετράγωνο τα δύο μέλη της εξίσωσης (Α). Να λύσετε την εξίσωση (Β). (Μονάδες 12)

γ) Να λύσετε την εξίσωση (Α). (Μονάδες 8)

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΓΩΝΙΩΝ

2_22639

α) Να δείξετε ότι : $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\eta\mu x$. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε με την βοήθεια του ερωτήματος α) την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{4}\right), \mathrm{x}\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

2_22649

α) Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3-6x^2+11x-2):(x-3)$. (Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=x^3-6x^2+11x+\lambda$ να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η διαίρεση $P(x):\ (x\ -3)$ να έχει υπόλοιπο 0. (Μονάδες 15)

2_22680

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$P(x)=-2x^3+\lambda^2(x^2-1)+\lambda(x^3-1)+\lambda+9$ και

$Q(x)=(\lambda+12)x^2+(\lambda-2)x^3+(\lambda^2-9)x, \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι και τα δύο πολυώνυμα είναι 3ου βαθμού. Συμφωνείτε με την άποψη αυτή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) είναι ίσα. (Μονάδες 12)

4_22762

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)=3x^4-12x^3+8x^2+\alpha x+\beta$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Αν το πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με x +1 αφήνει υπόλοιπο 16 + P(1) και διαιρούμενο με x -1 αφήνει υπόλοιπο 16 - P (-1) , τότε:

α) να αποδείξετε ότι P(1) = 0 και P(-1) = 16 (Μονάδες 8)

β) να αποδείξετε ότι α = 4 και β = -3 (Μονάδες 9)

γ) να αποδείξετε ότι $\mathrm{P}(4)\cdot\mathrm{P}(5)\cdot\mathrm{P}(6)\cdot\mathrm{P}(7)\neq 0$ (Μονάδες 8)

4_22764

Έστω P(x) πολυώνυμο τρίτου βαθμού το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+2x και είναι τέτοιο, ώστε P (1) = 0 και P(2) = 8.

α) Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x^2-2x$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 8 . (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την ανίσωση P(x) > 2 . (Μονάδες 9)

ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

2_22640

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2+x-12$

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το διώνυμο x-3 είναι παράγοντας του P(x). (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 12)

2_22641

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+ax^2-11x+30$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι έχει ρίζα το 5 .

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α. (Μονάδες 12)

β) Για α=-4 να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 13)

2_22642

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+ax^2-11x+30$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ για το οποίο γνωρίζουμε ότι η τιμή του για x=1 είναι 16 .

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α. (Μονάδες 12)

β) Αν α=-4 και το 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $P(x)=0$ να προσδιορίσετε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$. (Μονάδες 13)

2_22643

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ με $\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ το οποίο έχει ρίζες τους αριθμούς 0,1 και 3 .

α) Να δείξετε ότι β=-4,γ=3 και δ=0. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)<0$. (Μονάδες 10)

2_22644

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\lambda^2x^3-4\lambda x+3$ με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το x-1. (Μονάδες 10)

β) Αν λ=3 να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου P(x). (Μονάδες 15)

2_22645

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=2x^4-x^3+ax^2-5x+6$ διέρχεται από το σημείο Μ(-2,0),

α) να αποδείξετε ότι α=-14 (Μονάδες 12)

β) να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες χ΄χ και y΄y. (Μονάδες 13)

2_22646

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3-10x^2+9x-2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $3x^2-4x+1$ και να γράψετε την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 10)

2_22647

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3+x^2-5x+2$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα χ΄χ (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα χ΄χ. (Μονάδες 10)

2_22648

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2\text{-}5x+\beta$ με $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο *P(x)* έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το *x*- 2 είναι ίσο με - 4, να βρείτε τα $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$. (Μονάδες13)

β) Αν α=-2 και β=6 , να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$. (Μονάδες 12)

2_22681

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + αx^2 + βx + 2$ Αν το P(x) έχει παράγοντα το x + 1 και P(2) = 18,τότε:

α) Να αποδείξετε ότι α = 1 και β = 2 (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση: P(x) = 0 (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $\mathrm{P}(x)\le 0$ (Μονάδες 7)

2_22682

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+(k-6)x^2-7x+k.$

α) Να βρείτε για ποια τιμή του $k\in\mathbb{R}$, το 2 είναι ρίζα του P(x). (Μονάδες 12)

β) Αν κ = 6, να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0. (Μονάδες 13)

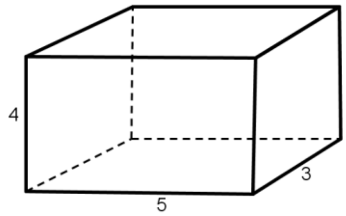
2_22683

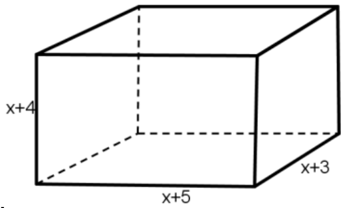
Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}\left(x\right)=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$.

α) Αν γνωρίζετε ότι η τιμή του πολυωνύμου για x = 1 είναι ίση με 10 και P(2) = 10, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 12)

β) Αν α = -5 και β = 8, να λύσετε την ανίσωση P(x) > 10. (Μονάδες 13)

2_22684





Μια εταιρεία κατασκευάζει κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm, 4cm και 5cm.
Ένας νέος πελάτης ζήτησε από την εταιρεία να κατασκευάσει κουτιά με όγκο 120 cm^3 , δηλαδή διπλάσιο από εκείνον που κατασκευάζει.
Η εταιρεία αποφάσισε να κατασκευάσει τα κουτιά που ζήτησε ο πελάτης της, αυξάνοντας τις διαστάσεις του αρχικού κουτιού κατά σταθερό ακέραιο μήκος x.

α) Να αποδείξετε ότι το x θα είναι λύση της εξίσωσης $x^3+12x^2+47x-60=0$.
(Ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις α, β, γ δίνεται από τον τύπο:
V = α·β·γ) (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο x λύνοντας την εξίσωση που δίνεται στο ερώτημα α). (Μονάδες 13)

2_22685

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=(\alpha^3+2)x^3+x^2+1$ και $Q(x)=3\alpha x^3+x^2+1$, όπου α θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να βρείτε το α ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν α = 1, να αποδείξετε ότι η εξίσωση P(x) = 0 δεν έχει ακέραιες ρίζες. (Μονάδες 12)

2_22686

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+2x^2-4x+\lambda$.

α) Αν P(-1) = 6, να δείξετε ότι λ = 1. (Μονάδες 11)

β) Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0. (Μονάδες 14)

2_22687

Το πολυώνυμο $P(x)=(\lambda^2-1)x^4-2(\lambda-1)x^3+2\lambda x^2+\lambda+1$ είναι 3ου βαθμού.

α) Να δείξετε ότι λ = -1. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το P(x). (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις ρίζες του P(x). (Μονάδες 9)

2_22688

Το πολυώνυμο P(x) αν διαιρεθεί με το (x - 2) δίνει πηλίκο (x^2-3x+2) και υπόλοιπο τον πραγματικό αριθμό υ.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης. (Μονάδες 8)

β) Αν P(1) = 10, να βρείτε το υ. (Μονάδες 9)

γ) Αν υ=10 ,να βρείτε το P(x). (Μονάδες 8)

4_22734

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με εμβαδό $E=30cm^2$ *του* οποίου η υποτείνουσα είναι κατά 1cm μεγαλύτερη από τη μία κάθετη πλευρά. Αν ονομάσουμε *x* το μήκος αυτής της κάθετης πλευράς και *y* το μήκος της άλλης κάθετης (σε *cm),* τότε:

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί *x, y* ικανοποιούν τις σχέσεις: $y=\dfrac{60}{x}$ και $(x+1)^2=x^2+y^2$
(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο αριθμός *x* ικανοποιεί την εξίσωση: $2x^3+x^2-3600=0.$ (Μονάδες 4)

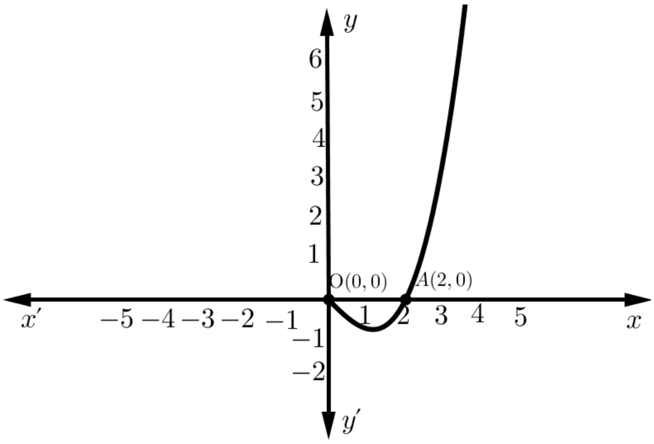
γ) Αν γνωρίζετε ότι το μήκος της πλευράς *x* είναι αριθμός ακέραιος και μικρότερος του 15, να βρείτε την τιμή του *x* καθώς και τα μήκη των άλλων πλευρών του τριγώνου.
(Μονάδες 12)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλο ορθογώνιο τρίγωνο (με διαφορετικά μήκη πλευρών από αυτά που προσδιορίσατε στο ερώτημα γ)) το οποίο ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. (Μονάδες 5)

4_22759

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τμήμα της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \gamma x + \delta, x \in R$ και *γ, δ* πραγματικές σταθερές.



α) Με βάση τη γραφική παράσταση, να αποδείξετε ότι $\gamma = -1$ και $\delta = 0$. (Μονάδες 5)

β) Θεωρώντας τώρα δεδομένο ότι $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x, x \in R$:

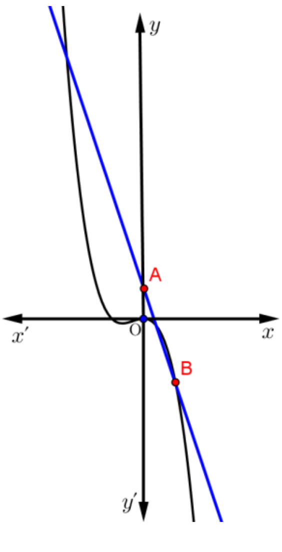
i. Να αποδείξετε ότι $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in R$. (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας το σχήμα και να συμπληρώσετε τη γραφική παράσταση της f για x < 0. (Μονάδες 5)

iii. Να επαληθεύσετε ότι $f(1) = -\frac{3}{4}$ και, στη συνέχεια, να λύσετε τις εξισώσεις

$f(x) = -\frac{3}{4}$ και $f(x) = \frac{3}{4}$. (Μονάδες 10)

4_22777



Στο σχήμα φαίνονται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^3 - x^2$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A (0, 1) και B (1, -2).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας. (Μονάδες 7)

β) Αν η ευθεία έχει εξίσωση $y = -3x + 1$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας με τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $-x^3 - x^2 < -3x + 1$ (Μονάδες9)

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

4_22766

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\left(\kappa^2-1\right)x^4+\frac{1}{2}\left(\kappa+1\right)x^3+\left(\kappa-1\right)x^2-3\kappa x+\lambda, \kappa, \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ αν το πολυώνυμο P(x) είναι 3ου βαθμού και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x -1 είναι ίσο με - 4. (Μονάδες 7)

β) Για κ = 1 και λ = -2

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x -1. (Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση P(x) + 4 = x^2 -1. (Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{P(x)}{(x-1)^2(x+2)}\geq 1$. (Μονάδες 6)

4_22769

Δίνεται το πολυώνυμο $P\left(x\right)=2x^3+ax^2+\beta x+2$ με $\alpha, \ \beta\in\mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x - 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x +1 είναι ίσο με -6, να βρείτε τα $\alpha, \ \beta\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

β) Αν α = -5 και β = 1, να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0 . (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^3 3\omega+5\eta\mu^2 2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega-3 \ = \ 0$. (Μονάδες 10)

4_22772

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\mathrm{x})=x^4-x^3+\kappa x^2+x+\lambda$ με $\kappa, \lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda\in\mathbb{R}$ όταν το πολυώνυμο *P(x)* έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το x + 2 . (Μονάδες 7)

β) Για κ = -7 και λ = 6 να λυθεί η εξίσωση P(x) = 0 . (Μονάδες 9)

γ) Για κ = -7 και λ = *6* να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-5}\geq 0$. (Μονάδες 9)

4_22773

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-7x+\alpha+5$, για το οποίο γνωρίζουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x είναι ίσο με 6 και ότι έχει ρίζα το 1.

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β (Μονάδες 8)

β) Για $\alpha=1$ και $\beta=0$, να λύσετε

i. την ανίσωση $P(x)\geq 0$ (Μονάδες 8)

ii. την εξίσωση $\sqrt{P(x)}=x-1$ (Μονάδες 9)

4_22774

Δίνεται το πολυώνυμο $P\left(x\right)=x^3+\alpha^3x^2-\alpha^2x-\alpha$, με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση P(x):(x - α) και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες το (x - α) διαιρεί το P(x). (Μονάδες 6)

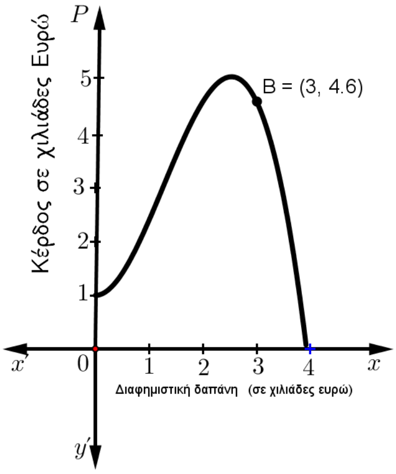
γ) Αν $\alpha=-1$, τότε:

i. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$. (Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\left(x+1\right)P\left(x\right)\leq 0$. (Μονάδες 6)

4_22775

Μια εταιρεία εκτίμησε ότι το κέρδος της P *(σε* χιλιάδες ευρώ) από την πώληση ενός συγκεκριμένου προϊόντος ήταν: $P(x) = -\,0,5x^3 + 1,9x^2 + 1$, $0 \le x < 4$, όπου x είναι η διαφημιστική δαπάνη (σε χιλιάδες ευρώ). Για αυτό το προϊόν, ξόδεψε για διαφήμιση 3 χιλιάδες ευρώ και το κέρδος της ήταν 4,6 χιλιάδες ευρώ.



α) i. Να χρησιμοποιήσετε την παραπάνω γραφική παράσταση της συνάρτησης P(x) για να εκτιμήσετε ένα άλλο ποσό x που θα μπορούσε να δαπανήσει για διαφήμιση η εταιρεία ώστε να έχει το ίδιο κέρδος. (Μονάδες 5)

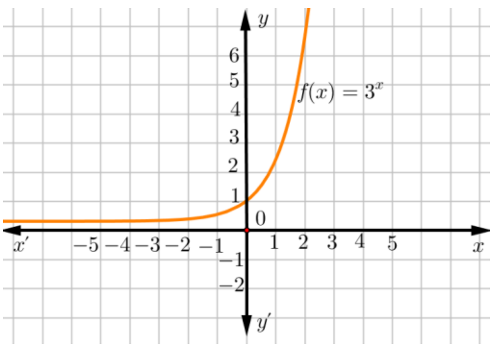
ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά το αποτέλεσμα του ερωτήματος i. (Μονάδες 10)

β) Πόσα χρήματα πρέπει να δαπανήσει η εταιρεία για διαφήμιση, ώστε το κέρδος της να είναι μεγαλύτερο από 4,6 χιλιάδες ευρώ; (Μονάδες 10)

ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

2_22630

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3^x$, με $x \in R$



α) Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = 3^x + 1$ και $h(x) = 3^x - 1$, μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)

β) Ποια είναι η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g και ποια της γραφικής παράστασης της h; (Μονάδες 13)

2_22633

Δίνεται συνάρτηση $\alpha^x : \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ με $\alpha^{38} < \alpha^{24}, a \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

α) Να προσδιορίσετε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f\left(x\right)=0$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2^{x-1} < \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x+5}$. (Μονάδες 12)

4_22787

Όταν ένας ασθενής παίρνει μια δόση ενός φαρμάκου, τότε ο οργανισμός του το μεταβολίζει έτσι ώστε η ποσότητά του να μειώνεται σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t)=q_0 a^t \;, t \geq 0$ όπου t ο χρόνος (σε ημέρες), $f(t)$ η ποσότητα του φαρμάκου(σε mg) και οι αριθμοί α,q_0 είναι κατάλληλες θετικές σταθερές.

α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η σταθερά q_0 στο πλαίσιο του προβλήματος και να αιτιολογήσετε γιατί ισχύει 0 < α < 1. (Μονάδες 6)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία ημέρα μετά τη λήψη του φαρμάκου, η ποσότητά του στον οργανισμό του ασθενούς έχει υποδιπλασιαστεί.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \dfrac{1}{2}$ (Μονάδες 5)

ii. Να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών της συνάρτησης f , εκφράζοντας τις τιμές $f(t)$ συναρτήσει της αρχικής τιμής q_0. (Μονάδες 4)

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(t)	q_0	$\frac{q_0}{2}$							

γ) Υποθέτουμε τώρα ότι $\alpha = \dfrac{1}{2}$ και ότι η ποσότητα του φαρμάκου που παραμένει στον οργανισμό στο τέλος της 4ης ημέρας είναι 25 mg.

i. Να υπολογίσετε την ποσότητα της δόσης που πήρε ο ασθενής. (Μονάδες 5)

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο διάστημα [0,6]. (Μονάδες 5)

4_22790

Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης λόγω των μέτρων που πάρθηκαν ο πληθυσμός των αγροτών (σε χιλιάδες) μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής ($Q\left(t\right) = Qo \cdot e^{ct}$). Ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και μετά από δύο χρόνια έμεινε ο μισός.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό των αγροτών μετά από t χρόνια είναι: $Q\left(t\right) = 8 \cdot e^{-\frac{t}{2} \cdot ln2}$ (Μονάδες 10)

β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

γ) Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

4_22791

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot 2^x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $a,\beta\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α(1,3) και Β(2,13).

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = -7$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα y΄y. (Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(2^x-31)<3$. (Μονάδες 7)

ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

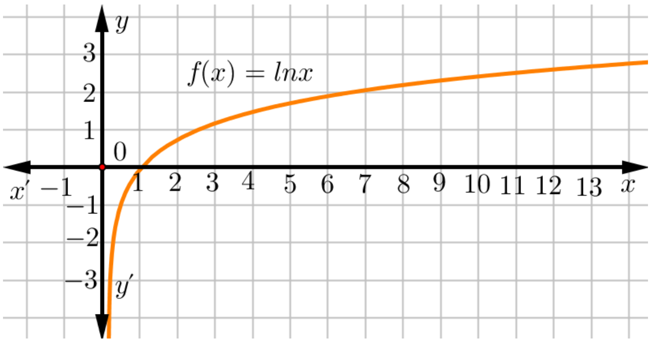
2_22632

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x-3), x>3$.

α) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=\ln x$. (Μονάδες 8)

β) Σε ποιο σημείο τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες8)

γ) Ποια είναι η ασύμπτωτη της C_f; (Μονάδες 9)



2_22634

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A=\ln x+\ln(x+6)$ (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\ln x+\ln(x+6)=\frac{1}{2}\ln 49$

(Μονάδες 15)

2_22635

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln\left(e^{2x}-e\right)-1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$. (Μονάδες 13)

2_22636

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=ln(x^2+4)$ και $g(x)=lnx+ln4$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. (Μονάδες 13)

2_22637

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln\left(3-\sqrt{x+1}\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$. (Μονάδες 12)

2_22638

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln(x+1)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής (αν υπάρχουν) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες x΄x και y΄y . (Μονάδες 10)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της $y=\ln x$. (Μονάδες 7)

4_22794

Δίνεται το πολυώνυμο $\mathrm{P}(\mathrm{x})=x^3+\alpha x^2+\beta x+6$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το x +1 και η αριθμητική τιμή του για x = 2 να είναι ίση με 12. (Μονάδες 7)

β) Για α=-2 και β=3

i. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το x - 2 . (Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{x})\le -x+14$. (Μονάδες 7)

iii. Να λύσετε την ανίσωση $\mathrm{P}(\mathrm{lnx})\le -\ln x+14$. (Μονάδες 6)

4_22796

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=ln\left(e^x-1\right)$ και $g(x)=lnx^2$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g. (Μονάδες 4)

β) Να λύσετε τις ανισώσεις f (x)> 0 και g (x) < 0. (Μονάδες 8)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(ln3)$ και $g\left(\frac{2}{e}\right)$ (Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x)-f(x) = g\left(\sqrt{e-1}\right)$. (Μονάδες 7)

4_22799

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=log(x-2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε τον αριθμό $100^{\log\sqrt{6}}$ (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $4\cdot 4^{f(x)}-9\cdot 2^{f(x)}+100^{\log\sqrt{6}}-4=0$ (Μονάδες 13)