

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
12^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΘΕΜΑΤΑ (Νέο 2020)**

[Κεφάλαια 1 & 2 μέχρι τη παράγραφο 2.7 του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

A.1 α. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

β. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται 1-1.

γ. Να διατυπώσετε το θεώρημα **Rolle** και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 1x3=3

A2. Να αποδείξετε το θεώρημα:

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A.3 Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- « Αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1-1 στο R , τότε και η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1-1 στο R ».

1). Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθές, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδές.

Μονάδες 2

2). Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λάθος.

α). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

β). Αν ισχύει $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 και υπάρχει το όριο της f στο x_0 , τότε κατ'ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

γ). Αν μία συνάρτηση f είναι 1-1 τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

δ). Έστω f, g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Αν ισχύουν: $f(x) \leq g(x)$, κοντά στο x_0 και $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε θα ισχύει:

$\lim_{x \nearrow x_0} g(x) = +\infty$.

ε). Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0 τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 2x5=10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$ και $g(x) = \ln x$

B1. Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x) = (g \circ h)(x)$.

Μονάδες 7

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 8

B3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

Μονάδες 5

B4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x) = \alpha^x + x^2 - x$, $\alpha > 0$ και $f(x) = \ln(x^2 + 1) + e^x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$.

A. Να δείξετε ότι $\left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

B. Αν ισχύει $h(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\alpha = e$.

Μονάδες 3

Για $\alpha = e$ τότε:

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ2. Ένα σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ κινείται πάνω στη C_h έτσι ώστε να απομακρύνεται από τον άξονα $x'x$ με ρυθμό $2 \frac{\mu\text{ον}}{\text{sec}}$. Να βρείτε τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η απόσταση του $M(x, y)$ από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή κατά την οποία το M διέρχεται από το σημείο $A(1, h(1))$.

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 4

Γ4. Να λύσετε την ανίσωση: $6 \ln \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} + 6e^{x^2} + 2x^6 - 3x^4 > 6e^x + 2x^3 - 3x^2$.

Μονάδες 3

Γ5. Αν η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f^{-1} στο σημείο $A(1, f^{-1}(1))$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο A με τεταγμένη 9 και τον άξονα $x'x$ στα σημεία B και Γ με τετμημένες -2 και 3 αντίστοιχα.
- Η f είναι γνησίως μονότονη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[0, +\infty)$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε το πρόσημο της f .

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(5)x^5 + f(8)x^4 - x + 1}{f(2)x^4 - x + 1}$.

Μονάδες 3

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - f(x+1) = 3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 7

Δ5. Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$ και ισχύει $(f(x) - 9)f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε $f'(x) < f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών.

Τα θέματα επιμελήθηκε ο Ρουσάλης Ηλίας, Μαθηματικός - Συγγραφέας.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο και Μοτσάκο Βασίλειο.