

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
14^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΘΕΜΑΤΑ (Νέο 2020)**

[Κεφάλαια 1 & 2 μέχρι τη παράγραφο 2.7 του σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο και πότε τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 5

A3. Έστω ο ισχυρισμός: «Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f^2(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδες 2)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα (α). (μονάδες 3)

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λάθος.

α) Για κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \text{ για κάθε } x \in A \text{ και } y \in f(A).$$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$

δ) Η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες (2× 4=8)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & |x| \leq 1 \\ \frac{2}{x}, & |x| > 1 \end{cases}$.

B1. Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.

Μονάδες 6

B2. Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f .

Μονάδες 4

B3. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , $|f|$ και $-f$.

Μονάδες 8

B4. Αν η εξίσωση $f(x) = (\mu + 1)^{2021} + 3$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού μ .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x) = |2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x|$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια (μονάδες 2) και ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το οποίο να υπολογίσετε (μονάδες 2).

Μονάδες 4

Γ2. Να γράψετε ισοδύναμα τη συνάρτηση f χωρίς την απόλυτη τιμή.

Μονάδες 7

Γ3. Αν η συνάρτηση f δεν ικανοποιεί το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών σε οποιοδήποτε κλειστό διάστημα της μορφής $[\alpha, \beta]$, όπου $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = -\beta$ (μονάδες 5) και ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα αυτό (μονάδες 3).

Μονάδες 8

Γ4. Αν $M_0(x_0, y_0)$, όπου $y_0 \neq f(x_0)$, είναι ένα σημείο του επιπέδου, τότε να

αποδείξετε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο της C_f με τετμημένη $x_1 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ που απέχει από

το M_0 λιγότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της στο διάστημα αυτό και ένα,

τουλάχιστον, σημείο της C_f με τετμημένη $x_2 \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, που απέχει από το M_0 περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της στο διάστημα αυτό.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε:

- $f(x) = \sqrt{\frac{4}{\rho}x^2 + \alpha x + \frac{\rho}{2}}$ με $\rho, \alpha \in \mathbb{Z}$ και $\rho < \alpha$, $\rho \neq 0$.
- $e^{g(x)} \leq e^{\mu x} (g(x) + 1 - \mu x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και μ πραγματικός αριθμός.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x + \frac{1}{2}}$ (μονάδες 4) και $g(x) = \mu x$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού μ το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f(x)+g(x)}$$

Μονάδες 4

Δ3. Αν η γραφική παράσταση της g εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f , τότε να υπολογίσετε την τιμή του μ και το σημείο επαφής.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από σημείο $M(\alpha, \beta)$ του επιπέδου, με $\beta > f(\alpha)$.

Μονάδες 8

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών.

Το διαγώνισμα επιμελήθηκε ο Μάκης Χατζόπουλος, Μαθηματικός του 1ου ΓΕΛ Ν. Ψυχικού.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο και Μοτσάκο Βασίλειο.