Θέμα A

A1) $f(x)=x^4-2x^2+1$ $\qquad g(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$

$=(x^2-1)^2,\ x\leq 1$

$Dh=\{x\in Dg \text{ και } g(x)\in Df\}=[0,1]$ $\qquad h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$

$x\geq 0 \qquad \sqrt{x}\leq 1$ $\qquad =(\sqrt{x}^2-1)^2=(x-1)^2$

$x\leq 1$ $\qquad$ με $x\in[0,1]$

A2) Έστω $x_1,x_2\in[0,1]$ με $h(x_1)=h(x_2)$

$(x_1-1)^2=(x_2-1)^2$ $\qquad x\leq 1\Leftrightarrow x-1\leq 0$

$|x_1-1|=|x_2-1|$

$-(x_1-1)=-(x_2-1)$

$x_1=x_2$

άρα h 1-1 $\Rightarrow$ αντιστρέφεται

Θέτω $h(x)=y$

$(x-1)^2=y$ $\quad$ πρέπει $y\geq 0$

$|x-1|=\sqrt{y}$

$-x+1=\sqrt{y}$

$x=1-\sqrt{y}$ $\qquad$ με $0\leq x\leq 1$

$0\leq 1-\sqrt{y}\leq 1$

άρα $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$ $\qquad -1\leq -\sqrt{y}\leq 0$

με $0\leq x\leq 1$ $\qquad 0\leq \sqrt{y}\leq 1$

$\underbrace{0\leq \sqrt{y}}_{\text{ισχύει}}\ \underbrace{\sqrt{y}\leq 1}_{y\leq 1}$

A3) $\lim\limits_{x\to 1^-}\phi(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}=\phi(1)$

i)

άρα φ συνεχής στο 1
και φ συνεχής στο [0,1) ως πράξεις συνεχών } φ συνεχής στο [0,1]

$\phi(0)=\dfrac{h^{-1}(0)}{1-0}=1$
$\phi(1)=\dfrac{1}{2}$ } $\phi(0)\neq\phi(1)$ $\quad$ άρα ισχύουν οι υποθέσεις του ΘΕΤ στο [0,1]

ii) $\dfrac{\pi}{6}<a<\dfrac{\pi}{2}\ \underset{(0,\frac{\pi}{2})}{\overset{\eta\mu\uparrow}{\Leftrightarrow}}\ \eta\mu\dfrac{\pi}{6}<\eta\mu a<\eta\mu\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}<\eta\mu a<1$

από ΘΕΤ για τη φ στο [0,1]
έχω ημα ανάμεσα στα φ(0), φ(1) } υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\phi(x_0)=\eta\mu a$

ή θέτω $w(x)=\phi(x)-\eta\mu a$

w συνεχής [0,1]

$w(0)=\phi(0)-\eta\mu a=1-\eta\mu a>0$

$w(1)=\phi(1)-\eta\mu a=\dfrac{1}{2}-\eta\mu a<0$ } $\overset{\Theta B}{\Rightarrow}$ υπάρχει $x_0\in(0,1)$ ώστε $w(x_0)=0$

$\phi(x_0)=\eta\mu a$

Θέμα Β

Β1) η f συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως άθροισμα συνεχων

η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχων

άρα για να είναι συνεχής πρέπει να είναι συνεχής στο 0

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) = f(0)$

$1 = 1-\ln\lambda = 1$

$\ln\lambda = 0$

$\lambda = 1$

Β2) i) έστω $x_1, x_2 \in (-\infty,0]$ με $x_1 < x_2 \overset{e>1}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2}$ $\Big\}$ $e^{x_1}+x_1 < e^{x_2}+x_2$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

άρα $f \uparrow (-\infty,0]$

έστω $x_1,x_2 \in (0,+\infty)$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow$ $\qquad$ $x_1 < x_2$

$-x_1 > -x_2 \Leftrightarrow$ $\qquad$ $x_1+1 < x_2+1$

$e^{-x_1} > e^{-x_2}$ $\qquad$ $\ln(x_1+1) < \ln(x_2+1)$

$-\ln(x_1+1) > -\ln(x_2+1)$

$e^{-x_1} - \ln(x_1+1) > e^{-x_2} - \ln(x_2+1)$

$f(x_1) > f(x_2)$ άρα $f \downarrow (0,+\infty)$

$f((-\infty,0]) \underset{\text{συν/ης}}{\overset{\uparrow}{=}} (\lim_{x\to-\infty} f(x), f(0)] = (-\infty,1]$

$f((0,+\infty)) \underset{\downarrow}{\overset{\text{συν/ης}}{=}} (\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to0^+} f(x)) = (-\infty,1)$ $\Big\}$ $f(A) = (-\infty,1]$

ii) για $k<1$ 2 λύσεις γιατί $k\in f(A_1)$, $k\in f(A_2)$
και γν. μονότονη στο A_1 και
γν. μονότονη στο A_2

για $k=1$ 1 λύση γιατί $k\in f(A_1)$ και
$f \uparrow$ στο A_1
$k \notin f(A_2)$

για $k>1$ καμία λύση
γιατί $k\notin f(A_1)$
$k\notin f(A_2)$

Β3) προφανής ρίζα $x=0$ αφού $f(0)+f(0)=f(0)+f(0)$ ισχύει

• για $x\in(\pi,0)$ έχουμε $3x<2x \overset{\uparrow}{\Leftrightarrow} f(3x)<f(2x)$ ①

$|\eta\mu x| < |x| \Leftrightarrow |\eta\mu x| < -x$

$x, \eta\mu x < 0$ στο $(-\pi,0)$
και $f\uparrow(-\infty,0)$

$x < \eta\mu x < -x$

$f(x) < f(\eta\mu x)$ ②

από ① και ②
$f(3x)+f(x) < f(2x)+f(\eta\mu x)$

• για $x\in(0,\pi)$ έχουμε $3x>2x \overset{\downarrow}{\Leftrightarrow} f(3x)<f(2x)$ ③

$|\eta\mu x|<|x| \Leftrightarrow |\eta\mu x|<x$

$-x<\eta\mu x<x$

στο $(0,\pi)$ $\quad \eta\mu x,\ x>0$ και $f \downarrow (0,+\infty)$ $\quad \underbrace{\ }\ f(\eta\mu x)>f(x)$ ④

από ③ και ④ $f(x)+f(3x)<f(2x)+f(\eta\mu x)$

άρα $x=0$ μοναδική λύση

B4) Από σύνολο τιμών έχω $f(x)\geq 1$ και το = ισχύει για $x=0$

άρα $f(e^x+x+1)\geq 1$ $\quad f(\ln(-x-1)-x)\geq 1$

$2f(e^x+x+1)\geq 2$ $\quad$ το = όταν

το = όταν $\quad \ln(-x-1)-x=0$

$e^x+x+1=0$

$2f(e^x+x+1)+f(\ln(-x-1)-x)\geq 3$

και το = ισχύει όταν

$e^x+x+1=0$ και $\ln(-x-1)-x=0$

άρα αρκεί να δείξω ότι υπάρχει $\xi\in(-2,-1)$ ώστε $e^{\xi}+\xi+1=0$ κ' $\ln(-\xi-1)-\xi=0$

Θέτω $w(x)=e^x+x+1$, $x\in\mathbb{R}$

w συνεχής στο $[-2,-1]$ ως πισσ

$w(-2)=e^{-2}-2+1=\frac{1}{e^2}-1<0$

$w(-1)=e^{-1}-1+1=\frac{1}{e}>0$

$\overset{\text{ΘΒ}}{\Longrightarrow}$ $w(-2)w(-1)<0 \Rightarrow \exists$ τουλάχιστον ένα $\xi\in(-2,-1)$: $w(\xi)=0$

$e^{\xi}+\xi+1=0$

$e^{\xi}=-\xi-1>0$ αφού $\xi\in(-2,-1)$

$\xi=\ln(-\xi-1)$

$\ln(-\xi-1)-\xi=0$

και $w \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow$ το ξ είναι μοναδικό

Θέμα Γ

Γ1) $f(x)(2x-f(x))=x^2-\ln^2(e^x+1)$

$2xf(x)-f^2(x)=x^2-\ln^2(e^x+1)$

$f^2(x)-2xf(x)+x^2=\ln^2(e^x+1)$

$(f(x)-x)^2=\ln^2(e^x+1)\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$|f(x)-x|=|\ln(e^x+1)|=\overbrace{\ln(e^x+1)}^{\neq 0}$ (*)

άρα και $f(x)-x\neq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

και συνεχής ως διαφορά συνεχών

άρα $f(x)-x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-(+\infty)=-\infty$

$\Rightarrow f(x)-x<0$ κοντά στο $+\infty$

άρα $f(x)-x<0\ \forall x\in\mathbb{R}$, οπότε

η (*) γίνεται $-f(x)+x=\ln(e^x+1)$

$f(x)=x-\ln(e^x+1)$

$=\ln e^x-\ln(e^x+1)$

$=\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$

Γ2) $f(x)=\ln\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)=$

$\ln\left(\frac{e^x+1-1}{e^x+1}\right)=\ln\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)$

έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$

$\underset{e>1}{\Leftrightarrow} e^{x_1}+1<e^{x_2}+1 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{e^{x_1}+1}>\frac{1}{e^{x_2}+1} \Leftrightarrow 1-\frac{1}{e^{x_1}+1}<1-\frac{1}{e^{x_2}+1}$

$\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$

$f\uparrow(-\infty,+\infty)$

$f(A)\underset{\sigma\upsilon\nu}{\overset{\uparrow}{=}}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$

$(-\infty,0)$ γιατί

$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)\overset{1-1/(e^x+1)=u}{=}\lim_{u\to1}\ln u=0$

$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)\overset{1-1/(e^x+1)=u}{=}\lim_{u\to0^+}\ln u=-\infty$

Γ3) Θέτω $g(x) = f(e^x - \beta)(x-\beta) + f(e^x - a)(x-a) - 2025(x-a)(x-\beta)$

η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ ως πράξη

$g(a) = f(e^a - \beta)(a-\beta) > 0$ αφού $\left.\begin{array}{l} f(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ a < \beta \end{array}\right\}$ $g(a)g(\beta) < 0$

$g(\beta) = f(e^\beta - a)(\beta - a) < 0$

άρα από ΘΒ υπάρχει μια τουλάχιστον μια ρίζα της $g(x) = 0$ στο (a, β)

Γ4) $e^{f(-f(x))} = \frac{2}{3} \Rightarrow f(-f(x)) = \ln\frac{2}{3} \Leftrightarrow f(-f(x)) = f(\ln 2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow} -f(x) = \ln 2$

$f(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow f(x) = \ln\frac{1}{2} \Leftrightarrow \underset{1-1}{f(x) = f(0)} \Leftrightarrow x = 0$

Γ5) νδο υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε

$f(\xi) = \frac{3 - \ln 2 - \ln(e+1) - \ln(e^2+1)}{3} = \frac{2 + 1 - \ln 2 - \ln(e+1) - \ln(e^2+1)}{3} = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3}$

$\left.\begin{array}{l} 0 \le 0 < 2 \Leftrightarrow f(0) \le f(0) < f(2) \\ 0 < 1 < 2 \Leftrightarrow f(0) < f(1) < f(2) \\ 0 < 2 \le 2 \Leftrightarrow f(0) < f(2) \le f(2) \end{array}\right\} \oplus$ $f(0) < \underbrace{\frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3}}_{\eta} < f(2)$

$\left.\begin{array}{l} \eta \ f \text{ συνεχής στο } [0,2] \\ f(0) \neq f(2) \quad (0 < 2 \Leftrightarrow f(0) < f(2)) \\ f(0) < \eta < f(2) \end{array}\right\}$ από ΘΕΤ $\exists \ \xi \in (0,2): f(\xi) = \eta$

$f(\xi) = \frac{f(0) + f(1) + f(2)}{3}$

και $f \uparrow \Rightarrow \xi$ μοναδικό