

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΟΜΑΔΑΣ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
8^ο ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ -ΘΕΜΑΤΑ (Σε όλη την ύλη)**

ΘΕΜΑ Α

1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$.

Μονάδες 8

2. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 3

3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

4. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό, αν είναι σωστή ή με Λάθος αν είναι λανθασμένη.

α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 0$, τότε το 0 είναι θέση τοπικού ακρότατου.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $g \circ f$ και $f \circ g$ τότε υποχρεωτικά ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.

δ) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

ε) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) g'(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x) g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_{\alpha}^{\beta}$ όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση f , με $f(x) = e^{2x} + (x-1)^5$.

1. Να βρεθεί η μονοτονία της f και το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε, ότι η γραφική παράσταση C_f , της f , τέμνει τον άξονα $x'x$, σ' ένα ακριβώς σημείο.

Μονάδες 5

3. Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $g^3(x) + 2g(x) = 5f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

i. Η g έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f .

Μονάδες 5

ii. Η γραφική παράσταση C_g , της g , τέμνει τον άξονα $x'x$ στο ίδιο σημείο με την C_f .

Μονάδες 5

4. Να λυθεί η ανίσωση $g(f(x)) > g(e^2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $f^2(x) + 3f(x) - x = 0$, $x \in [-2, +\infty)$. Αν για κάθε $x \in [-2, +\infty)$ ισχύει $f(x) \geq -1$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $[-2, +\infty)$.

Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $[-2, +\infty)$.

Μονάδες 5

3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 5

4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(4, f(4))$.

Μονάδες 5

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [-2, +\infty)$, ισχύει $5f(x) \leq x + 1$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x (x^2 - 4x + 6)$ και η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύουν $g(1) + 2xg(x) - g(x+1) - (f(x) - 6)^2 \leq 0$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1+2h) - g(1-h)}{h} = 0$.

Να αποδείξετε ότι :

1. $g'(1) = 0$

Μονάδες 5

2. α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f για $x \rightarrow -\infty$.

Μονάδες 3

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 3

3. Να βρείτε σημείο A της C_h με $h(x) = \sqrt{f(x)}$ ώστε το σημείο $B(1,0)$ να απέχει την ελάχιστη απόσταση από την C_h και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_h είναι κάθετη στην ευθεία AB

Μονάδες 7

4. Αν $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ και $\int_{g(0)}^{g(\alpha)} f(x) dx = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0 \in (0, \alpha) : g'(x_0) = \exp x_0 \cdot g(x_0)$

Μονάδες 7

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Η εκπόνηση του διαγωνίσματος έγινε με τη βοήθεια Εθελοντών Εκπαιδευτικών.

Ο επιστημονικός έλεγχος πραγματοποιήθηκε από τους Κωνσταντόπουλο Κωνσταντίνο και Μοτσάκο Βασίλειο.