

7. Έστω f μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f''(x) \neq 0$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f''(x) \cdot e^{-x} - (f'(x))^2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \quad 2f'(0) + 1 = 0 \text{ και } f(0) = \ln 2.$$

i) Να δείξετε ότι ισχύει: $f'(x) + 1 = \frac{e^x}{1 + e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι: $f(x) = \ln(1 + e^x) - x$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα.

iv) Να δείξετε ότι ισχύει: $2f(x) + x \geq \ln 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

v) Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

vi) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$

vii) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$, να δείξετε ότι :

$$4E + 1 > \ln 16$$

$$i) \text{ Igy\u00e9n } f''(x)e^{-x} = (f'(x))^2 \quad \begin{array}{c} f'(x) \neq 0, e^{-x} > 0 \\ \text{on\u00f3z } (f'(x))^2 \neq 0 \end{array} \quad \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} = e^x \iff$$

$$\left(\frac{-1}{f'(x)}\right)' = (e^x)' \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{On\u00f3z } \frac{-1}{f'(x)} = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ha } x=0 \quad \frac{-1}{f'(0)} = e^0 + C \iff \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1 + C \iff 2 = 1 + C \iff C = 1.$$

$$\text{A\u00e1, } \frac{-1}{f'(x)} = e^x + 1 \iff f'(x) = \frac{-1}{e^x + 1} \iff f'(x) + 1 = \frac{-1}{e^x + 1} + 1 \iff$$

$$f'(x) + 1 = \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} \iff f'(x) + 1 = \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ii)

$$i) \text{ logy } f''(x) e^{-x} = (f'(x))^2 \quad \begin{matrix} f''(x) \neq 0, e^{-x} > 0 \\ \text{on } \mathbb{R} \quad (f'(x))^2 \neq 0 \end{matrix} \quad \frac{f''(x)}{(f'(x))^2} = e^x \iff$$

$$\left(\frac{-1}{f'(x)} \right)' = (e^x)' \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{On } \mathbb{R} \quad \frac{-1}{f'(x)} = e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{za } x=0 \quad \frac{-1}{f'(0)} = e^0 + C \iff \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1 + C \iff 2 = 1 + C \iff C = 1.$$

$$\text{Apa, } \frac{-1}{f'(x)} = e^x + 1 \iff f'(x) = \frac{-1}{e^x + 1} \iff f'(x) + 1 = \frac{-1}{e^x + 1} + 1 \iff$$

$$f'(x) + 1 = \frac{e^x + 1 - 1}{e^x + 1} \iff f'(x) + 1 = \frac{e^x}{e^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$ii) \text{ logy } (f(x) + x)' = (\ln(e^x + 1))' \iff f(x) + x = \ln(e^x + 1) + C_1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{za } x=0 \quad f(0) + 0 = \ln(e^0 + 1) + C_1 \iff \ln 2 = \ln 2 + C_1 \iff C_1 = 0$$

$$\text{Apa, } f(x) + x = \ln(e^x + 1) \iff f(x) = \ln(e^x + 1) - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

i) logice $f''(x)e^{-x} = (f'(x))^2$ $\begin{matrix} f''(x) \neq 0, e^{-x} > 0 \\ \text{onore } (f'(x))^2 \neq 0 \end{matrix}$ $\frac{f''(x)}{(f'(x))^2} = e^x \iff$

$$\left(\frac{-1}{f'(x)}\right)' = (e^x)' \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Onore $\frac{-1}{f'(x)} = e^x + C, x \in \mathbb{R}$

ya $x=0$ $\frac{-1}{f'(0)} = e^0 + C \iff \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1 + C \iff 2 = 1 + C \iff C = 1.$

Apa, $\frac{-1}{f'(x)} = e^x + 1 \iff f'(x) = \frac{-1}{e^x + 1} \iff f'(x+1) = \frac{-1}{e^{x+1}} + 1 \iff$

$$f'(x+1) = \frac{e^{x+1} - 1}{e^{x+1}} \iff f'(x+1) = \frac{e^x}{e^{x+1}}, x \in \mathbb{R}$$

ii) logice $(f(x)+x)' = (\ln(e^x+1))' \iff f(x)+x = \ln(e^x+1) + C_1, x \in \mathbb{R}$

ya $x=0$ $f(0)+0 = \ln(e^0+1) + C_1 \iff \ln 2 = \ln 2 + C_1 \iff C_1 = 0$

Apa, $f(x)+x = \ln(e^x+1) \iff f(x) = \ln(e^x+1) - x, x \in \mathbb{R}$

iii) logice $f'(x) = \frac{-1}{e^x+1} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, apa $f \downarrow$

Enicuz, $f''(x) = e^x \cdot (f'(x))^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, apa f uconv

iv) θ.v.S.O $2f(x) + x \geq \ln 4 \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 4 \Leftrightarrow$

$$f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 2^2 \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

$$f(0) = \ln 2, \quad f'(0) = -\frac{1}{2}$$

Η εφαπτομένη στο $(0, f(0))$ έχει εξίσωση

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

Η f είναι υπερίσως στο $\mathbb{R}$, οπότε $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2$

με το ίδιο να ισχύει για $x=0$

$$iv) \text{ D.v.S.O } 2f(x) + x \geq \ln 4 \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 4 \Leftrightarrow$$

$$f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 2^2 \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

$$f(0) = \ln 2, \quad f'(0) = -\frac{1}{2}$$

H εφ'αρτομένη στο $(0, f(0))$ έχει εφαπτομένη

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x + \ln 2$$

H f είναι υπερί στο $\mathbb{R}$, οπότε $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2$

με το ίδιο να ισχύει για $x=0$

$$v) a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1+e^x) - x) = +\infty \text{ γιατί}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+e^x) \stackrel{1+e^x=u}{=} \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1+e^x) = 1+0 = 1$$

$$\bullet \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+e^x) - x) \stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(1+e^x) - \ln e^x) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x} + 1) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

vi) $f \downarrow$ άρα 1-1, ονότερ σπιζεται η $f^{-1}: f(R) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{ονορ } f(R) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

$$y = f(x), y \in (0, +\infty)$$

$$y = \ln(1+e^x) - x \Leftrightarrow \ln(1+e^x) = x+y \Leftrightarrow 1+e^x = e^{x+y}$$

$$\Leftrightarrow 1+e^x = e^x \cdot e^y \Leftrightarrow e^x(e^y - 1) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e^y - 1} \Leftrightarrow$$

$$x = \ln \frac{1}{e^y - 1} \Leftrightarrow x = -\ln(e^y - 1)$$

$$\text{Άρα, } f^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1)$$

vi) $f \downarrow$ άρα 1-1, οπότε ορίστηκε $f^{-1}: F(R) \rightarrow R$

$$\text{όπου } F(R) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty)$$

$$y = f(x), \quad y \in (0, +\infty)$$

$$y = \ln(1+e^x) - x \Leftrightarrow \ln(1+e^x) = x+y \Leftrightarrow 1+e^x = e^{x+y}$$

$$\Leftrightarrow 1+e^x = e^x \cdot e^y \Leftrightarrow e^x(e^y - 1) = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e^y - 1} \Leftrightarrow$$

$$x = \ln \frac{1}{e^y - 1} \Leftrightarrow x = -\ln(e^y - 1)$$

$$\text{Άρα, } f^{-1}(x) = -\ln(e^x - 1)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\ln(e^x - 1) = +\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(e^x - 1) \stackrel{e^x - 1 = u}{\underset{u > 0 \text{ για } x > 0}}{\longrightarrow} \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(e^x - 1) = -\infty, \text{ γιατί}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - 1) \stackrel{e^x - 1 = u}{\longrightarrow} \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 1) = +\infty$$

vii) N.S.O $4E+1 > \ln 16$, óno $E = \int_0^1 f(x) dx$

logor $f(x) \geq -\frac{1}{2}x + \ln 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\mu + 2 = \ln 16$

pa $x=0$

Apa, $\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 (-\frac{1}{2}x + \ln 2) dx \Leftrightarrow E > \int_0^1 (-\frac{1}{2}x + \ln 2) dx$

Opus $\int_0^1 (-\frac{1}{2}x + \ln 2) dx = \left[-\frac{x^2}{4} + \ln 2 \cdot x \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \ln 2$

Apa, $E > -\frac{1}{4} + \ln 2 \Leftrightarrow 4E > -1 + 4\ln 2 \Leftrightarrow$

$4E+1 > \ln 2^4 \Leftrightarrow 4E+1 > \ln 16$

