1ο Διαγώνισμα

15-3-2020

Θέμα Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν
- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, να αποδείξετε ότι:

η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις για τις οποίες ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$ τότε $f \circ g = g \circ f$».

α) Είναι αληθής, ή ψευδής η πρόταση;

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

μονάδες 1+3

Α4. Να βρείτε το λάθος στην παρακάτω διαδικασία και να εξηγήσετε γιατί είναι λάθος:

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_{-1}^{1}=\ln 1-\ln 1=0$$

μονάδες 4

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0, τότε η σύνθεση τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

γ) Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha,\beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0)=0$.

μονάδες 6

Θέμα Β

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(\ln x)=\ln x|\ln x|$ για κάθε $x>0$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x|x|,\ x\in\mathbb{R}$.

μονάδες 3

Β2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

μονάδες 5

Β3. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} και στη συνέχεια να τις σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων.

μονάδες 6

Β4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)=x^3-x^2+2x-1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

μονάδες 5

Β5. Να λύσετε την ανίσωση $f^2(\eta\mu x)\le f^2(x)+x^{2020}$.

μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(e,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{\ln(x-e)^{x-e}+x-3}{x-e}$, $x>e$ και $f(e+1)=0$.

Να δείξετε ότι:

Γ1. $f(x)=(x-3)\ln(x-e)$, $x>e$.

μονάδες 6

Γ2. Υπάρχει $\xi\in(3,e+1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

μονάδες 5

Γ3. Η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x=\xi$.

μονάδες 8

Γ4. Το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=-f(x)$ και f, είναι $E(\Omega)=\dfrac{3e^2-14e+16}{2}-(e-3)^2\ln(3-e)$

μονάδες 6

Θέμα Δ

Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x)\geq e^x-3(x+1)^2+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\int_{-\alpha}^{\alpha}f(x)dx=\dfrac{e^{2\alpha}-1}{e^{\alpha}}+(1-\alpha)^3-(1+\alpha)^3+4\alpha$ για κάθε $\alpha>0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=e^x-3(x+1)^2+2$, $x\in\mathbb{R}$

μονάδες 7

Δ2. Να δείξετε ότι η f έχει δύο κρίσιμα σημεία.

μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=0$.

μονάδες 7

Δ4. Να δείξετε ότι $e^x-(e^2-18)x>3(x+1)^2+9-e^2$ για κάθε $x>2$.

μονάδες 5

Καλή τύχη!