

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x - 2, x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα, που βρίσκεται στο $(0,1)$.

iii) Να δείξετε ότι $e^{x_0} < e^{2-x_0} - 1 < e^2$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(x-2) + e^3x + \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$.

iv) Να βρείτε το α ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο και στη συνέχεια να δείξετε ότι η $y = (e^3 + 1)(x - 2)$ είναι η εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης