

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $(1, 2)$.

i) Να βρείτε τα α, β .

ii) Για $\alpha = -1$, $\beta = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 2x + e^{x-2}$, $x \in \mathbb{R}$

iii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο καμπής εφάπτεται της C_g .

iv) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 1, x = 2$.

v) Σημείο $M(x, y)$, $x > 0$ κινείται στη C_g με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του 2 cm/sec . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMN , όπου N η προβολή του M στον άξονα $x'x$ και O η αρχή των αξόνων, τη χρονική στιγμή που η (ε) εφάπτεται της C_g .