

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x^2 e^{\frac{1}{x}} & , x < 0 \\ 3x^2 + e^{\alpha-1} - \alpha & , x \geq 0 \end{cases}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

ii) α) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη της C_f στην αρχή των αξόνων.

β) Να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής.

Επιπλέον, δίνεται F μία παράγουσα της f με $F(0) = 0$

iii) Να μελετήσετε την F ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.

iv) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της F .

v) Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x) + f(x)}{x} \eta \mu \frac{1}{x}$.

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{F(x^2)}{x^3} + \eta \mu x \right)$.

vi) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_F, C_f .