

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (-x^2 + x - 1)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = g(1)$ (1) έχει ακριβώς δύο ρίζες.

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_1^{\rho} xg'(x)dx > 0$, όπου ρ ρίζα της εξίσωσης (1) με $\rho \neq 1$.

iv) Έστω $0 < \alpha < 1$, $2 < \beta < \rho$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (1, 2)$ ώστε

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = (\beta - \alpha)g(\xi).$$

v) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{g\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{e^2}}{x-1} + \frac{g(3) + \frac{1}{e}}{x-2} - \frac{\frac{1}{e} + g(0)}{x-\kappa} = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ με $\kappa > 2$.