Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\left(f'(x)-f(x)\right)(x^2+1)=2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- η εφαπτομένη της C_f στο σημείο με τετμημένη 0 είναι κάθετη στην ευθεία $y=-x+2026$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Δίνεται $f(x)=(x^2+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$

ii) Να βρείτε τη συμμετρική συνάρτηση, έστω g, της f ως προς τον άξονα $y'y$.

Δίνεται $g(x)=(x^2+1)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

iii) Να δείξετε ότι:

α) $f(x)+g(x)\geq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\eta\mu^2 x+1)(e^{\eta\mu x}+e^{-\eta\mu x})dx>\pi$.

γ) οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία $A\left(\kappa, f(\kappa)\right)$ και $B\left(-\kappa, g(-\kappa)\right)$, $\kappa\neq -1$ αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

iv) α) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=x_0$, $x=-x_0$, όπου $x_0>0$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ ώστε $E(\Omega)=1$.

Έστω F αρχική της f με $F(0)=3$ και $F(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και G αρχική της g με $G(0)=-3$ και $G(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

v) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή και η G είναι κοίλη.

vi) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}G(x)=-\infty$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $\Phi(x)=F(x)+G(-x)$, $x\in\mathbb{R}$

vii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Φ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της.

viii) Να δείξετε ότι $\frac{F(e^x)}{F(e^{-x})}>\frac{G(-e^{-x})}{G(-e^x)}$ για κάθε $x>0$.