

Έστω συνάρτηση  $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  παραγωγίσιμη και κυρτή για την οποία ισχύει  $x^2+2x+1\leq f(x)\leq e^{2x}$  για κάθε  $x\geq 0$ . Επίσης, δίνεται η συνάρτηση  $g(x)=F(x)-x^2$ ,  $x\geq 0$ , όπου  $F$  αρχική της  $f$  με  $F(0)=1$ .

i) Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_f$  στο σημείο  $M(0, f(0))$ .

ii) α) Να αποδείξετε ότι  $g(x)\geq x+1$  για κάθε  $x\geq 0$ .

β) Να δείξετε ότι  $\int_0^1 F(x)dx > \frac{11}{3}$ .

γ) Να αποδείξετε ότι  $g(x^2+1)+x+f(0)\geq(x-1)g(x)+g(x+1)+2F(0)$  για κάθε  $x\geq 1$ .

Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση  $\Phi(x)=x^3+x^2-(F(2)-7)x+1$ ,  $x\in\mathbb{R}$

iii) Να αποδείξετε ότι η  $\Phi$  έχει δύο τοπικά ακρότατα σε θέσεις  $x_1, x_2$  με  $x_1 x_2 < 0$ .

iv) Να δείξετε ότι η  $C_\Phi$  έχει μοναδικό σημείο καμπής, έστω  $N$ , με τεταγμένη  $y_N > \frac{29}{27}$ .