

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e - x(\ln x - 1)$, $x > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq \frac{\rho^2 + 1}{\rho}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, όπου $\rho \in (0, 1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x - x \ln x = e - x$, $x > 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (0, 1)$.

iii) Επιπλέον, δίνονται οι συναρτήσεις $h(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\varphi(x) = \ln x$, $x > 0$. Να δείξετε ότι $E(\Omega) = 1$, όπου Ω το χωρίο που περικλείεται από τις C_h, C_φ και τις ευθείες $x = x_0$, $x = 1$.

Δίνεται ότι $\rho < x_0$

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (\rho, x_0)$ τέτοιο, ώστε $e^{\rho - x_0} = -\frac{f(\xi)}{f''(\xi)}$.

v) Έστω F αρχική της f με $4F(1) = 3$. Να δείξετε ότι:

α) η F είναι κυρτή.

β) $F(x_0) < \frac{3}{4x_0}$.

γ) $F((0, +\infty)) = [F(x_0), +\infty)$.

vi) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{F(x) - F(x_0)}{\eta\mu(x - x_0)} \cdot \eta\mu \frac{2026}{x - x_0} \right)$.