Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν:

- $\left(f'(x)\right)^2 + f(x)f''(x) = \dfrac{e^x}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$, $f'(0)=0$

i) α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\Phi(x) = f(x)\cdot f'(x) - \dfrac{e^x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{e^x - x}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii) α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, +\infty)$, όπου $x_0 < 0$.

iii) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 4} \frac{f(x)f''(x)}{e^x - 1}dx = \frac{1}{2}(\ln 3 - \ln\sqrt{2})$.

iv) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\displaystyle\int_{\alpha-1}^{\alpha^4+3\alpha} \left(f(x) - f'(x)\right)dx = 0$.