

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2(2\ln x - 5), & x > 0 \\ \alpha & , x = 0 \end{cases}$, όπου α πραγματικός αριθμός για

τον οποίο ισχύει $\int_1^e \frac{x+\alpha}{x} dx = e(\alpha+1) - 1$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.

ii) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(x) + 5x^2$, $x \geq 0$

iv) Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτομένη σε κοινό σημείο.

v) Να δείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(g(\sqrt{\eta\mu x}) - f(\sqrt{\eta\mu x}) \right) dx = 5$.

vi) Να δείξετε ότι $\int_e^{e+2} G(x) dx > 2G(e+1)$, όπου G αρχική της g .