

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) + \int_1^e \left(\ln t + \frac{\alpha}{e-1} \right) dt \cdot x + 2 \leq \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$
- $f(x) \geq 2x - 2 + \frac{1}{2x}$ για κάθε $x > 0$
- $f(1) = -(\alpha + 2)$, $f'(1) = 1$

i) Να δείξετε ότι $\alpha = -3$.

ii) Να βρείτε την ασύμπτωτη, έστω (ε) , της C_f στο $+\infty$.

iii) Αν E το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , την (ε) και τις ευθείες $x = 1$, $x = e^{-\alpha}$, να αποδείξετε ότι $\frac{3}{2} \leq E \leq 3$.

iv) α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 - \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} \right) x^3 + \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t) - 2t) \right) x - 5 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_2 \in (2, 3)$.

β) Να δείξετε ότι $\int_1^{x_2} (f'(x) - 3x^2 + 6x - 3) dx < -\frac{2}{3}$.