

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{2g(2026)}{3(x^2+1)e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$, όπου g παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Ισχύει } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + \frac{3}{2}}{x} = 0.$$

i) Να αποδείξετε ότι $g(0) = -\frac{3}{2}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv) α) Να δείξετε ότι $f'(x) = f(x) \left(1 - \frac{2x}{x^2+1} \right)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f'(\eta \mu x)}{f(\eta \mu x)} dx$.

v) Να αποδείξετε ότι $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) > 1$, όπου $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$.