

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(\ln x) = 1 - \frac{x}{x+1} + x$ για κάθε $x > 0$
- $f(0) = 1 - \ln 2$

i) Να βρείτε την συνάρτηση f .

Δίνεται $f(x) = x - \ln(e^x + 1) + e^x$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $h(x) = f(x) - e^x$, $x \in \mathbb{R}$

iii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται.

iv) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \ln \frac{e^{f(x)+x^2} + 1}{e^{x^2} + 1}$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο $(-1, 0)$.

v) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(e^{\frac{1}{f(x)}} \cdot \ln \frac{x}{x_0} \right) = -\infty$.