

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Δίνεται $h(x) = (f \circ g)(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln^2 x}$, $x > 0$

ii) Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να αποδείξετε ότι $\int_{-\kappa}^{\kappa} \left| h(e^{x^2} + 1) \right| dx < \kappa$, $\kappa > 0$.

Επιπλέον, δίνεται H αρχική της h με $H(1) = 0$

iv) α) Να αποδείξετε ότι $H(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β) Να δείξετε ότι $H(x) - H(e^2) \leq \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}e^2$ για κάθε $x \in [e, +\infty)$.

v) Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{H(x)} - 1}{(\ln x)^2}$.

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = \frac{1}{x^2} H(x)$, $x \in (0, +\infty)$

vi) Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_φ , τον άξονα $x'x$ και

τις ευθείες $x = 1, x = e$. Να δείξετε ότι $E = \frac{\ln 2}{2} - \frac{H(e)}{e}$.