Δίνεται συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ για την οποία ισχύουν:

- $(x+1)\left(xg'(x)+g(x)\right)=1$ για κάθε $x>0$
- $g(1)=\ln 2$
- $g(0)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}+\eta\mu(x-1)}{x-1}$
- g κυρτή στο $(0,+\infty)$

i) Να αποδείξετε ότι $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+1)}{x} & , \ x>0\\ 1 & , \ x=0\end{cases}$.

ii) α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(0,1)$.

β) Να δείξετε ότι $g'(x)\geq -\dfrac{1}{2}$ για κάθε $x\geq 0$.

γ) Να βρείτε την ασύμπτωτη της $C_{g'}$ στο $+\infty$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση

$$\Phi(x)=\int_0^{\ln 2}\left(G(e^x)-\frac{1}{\ln 2}\right)dx\cdot x^3+\frac{1}{2}x^2-\int_1^2 G''(x)dx\cdot x+2026 \ , \ x\in\mathbb{R}$$

όπου G αρχική της g με $G(0)=0$.

iii) α) Να δείξετε ότι $G(x)\leq x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση Φ έχει στις θέσεις x_1,x_2 τοπικά ακρότατα με $x_1<0<x_2$ και $x_2>-x_1$.