

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{x+\alpha} & , x < 1 \\ (x-1)^2 + x & , x \geq 1 \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = -1$.

ii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

iii) Να αποδείξετε ότι $f(e^{x-1}) - e^{x-1} \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφη.

Έστω $f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & , x \in (0, 1) \\ \frac{1}{2} + \sqrt{x - \frac{3}{4}} & , x \in [1, +\infty) \end{cases}$

v) Να βρείτε το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, την $y = x$

και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}, x = 3$.

vi) Να λυθεί η εξίσωση $f(f^{-1}(e^{x^2-1})) = x^2$.

vii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} [(f(x) - x) \cdot \ln(x-1)]$.