

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \ln x - e^x$, $x > 0$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Έστω $h(x) = f(g(x)) = \ln(\ln x) - x$, $x \in (1, +\infty)$

ii) Να αποδείξετε ότι $h(x) \leq h(x_0)$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, όπου $x_0 \in (1, 2)$.

iii) Να αποδείξετε ότι η h είναι αντιστρέψιμη στο $[x_0, +\infty)$ και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της h^{-1} .

iv) α) Να αποδείξετε ότι $e(h(x) + 1) \leq (1 - e)x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

β) Να δείξετε ότι $\int_1^2 h(e^x) dx < -(e - 1)^2 - 1$.

v) Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)}{\ln(x - 1)}$.

β) $\lim_{x \rightarrow h(x_0)} \frac{\eta\mu x - x}{h^{-1}(x) - x_0}$.