

Δίνεται η γνησίως μονότονη και παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f^{-1}$  συνεχή για την οποία ισχύουν:

- $f(0) = 2$
- $f(x) + f^{-1}(x) = \frac{5}{2}x - 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

i) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = 0$ .

ii) Να δείξετε ότι  $f(2) = 3$ .

iii) Να δείξετε ότι  $\int_0^2 f(x)dx = 1 + \int_{-4}^0 f(x)dx$ .

iv) Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο σημεία με τετμημένες  $x_1, x_2 \in (-4, 2)$  στα σημεία οι εφαπτόμενες της  $C_f$  να είναι παράλληλες στην ευθεία  $y = \frac{1}{2}x$ .

v) Να δείξετε ότι  $2 \leq f(x) \leq \frac{5}{2}x + 2$  για κάθε  $x \geq 0$ .

vi) Να δείξετε ότι  $3 \leq \int_{-4}^0 f(x)dx \leq 8$ .