

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \cdot \sqrt{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και περιττή.

ii) α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

Έστω $g = f^{-1}$ με $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$

iii) α) Να αποδείξετε ότι η C_g για $x > 0$ και η C_f για $x < 0$ έχουν κοινή εφαπτομένη (ε_1) , η οποία και να βρεθεί.

β) Ευθεία $\varepsilon_2 // \varepsilon_1$ εφάπτεται στις C_g για $x < 0$ και η C_f για $x > 0$. Να βρεθεί η εξίσωσή της καθώς και τα σημεία επαφής.

iv) α) Να δείξετε ότι $g(x) = x|x|$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(x) dx = 0$, όπου $\varphi = f - g$ και $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

v) α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g .

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g .