

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπο $f(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

ii) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii) α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g .

β) Να δείξετε ότι $g(x) < x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

iv) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x = e^{-\frac{x^2}{2}}$ έχει ακριβώς μία ρίζα, έστω x_0 , με $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Δίνεται $\ln 2 > 0,6$.

v) α) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\theta \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $\eta\mu\theta = x_0$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_{\theta}^{\frac{\pi}{6}} g(\eta\mu x) dx + \int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}} g(\eta\mu x) dx > 0$.