

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x \ln \left(1 - \frac{1}{x} \right)$ και

$$g(x) = \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x.$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη.

ii) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα.

iii) α) Να εξετάσετε αν οι C_f, C_g έχουν κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β) Να δείξετε ότι οι οριζόντιες ασύμπτωτες των C_f, C_g έχουν απόσταση $d = \frac{1}{e} + 1$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_2^3 (g(x) + f(x)) dx > 9 \ln \frac{2}{3} + 3 \ln 2$.