

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-5(2x-10)}{4(5-\sqrt{5x})}$
- $f(ex) = \ln x + 2e^2 x^2 + \alpha$ για κάθε $x > 0$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $f(1) = 5$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + 2x^2 + 3$, $x > 0$.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και τα σημεία καμπής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv) Να αποδείξετε ότι $\left(-\ln 2 + \frac{7}{2}\right)\pi < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 3f(\eta\mu x) dx < 5\pi$.

v) Να δείξετε $x^2 f(x) + f(x^4) \geq x^2 f(x^2) + f(x^3)$ για κάθε $x \geq 1$.

vi) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\eta\mu(2x) - \sqrt{3}x}{f'(x) - 4}$.