

Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A = \mathbb{R} - \{0\}$ με $f(x) = x - 1 - \ln|x|$.

i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $|x| - e^{x-1} = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, την $x_0 \in \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$

και την $x_1 = 1$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$

iii) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Έστω $h(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_{x_0}^0 h(x) dx = x_0(e+1) + 1 + \frac{x_0^2}{2}$.

v) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\ln(x\eta\mu x)}$.