Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\begin{cases} x^2\ln|x| \ , & x\neq 0 \\ I+\kappa \ , & x=0 \end{cases}$, όπου

$I=\int_1^e 2x\ln|x|\,dx$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

i) Να δείξετε ότι $\kappa=-\dfrac{e^2+1}{2}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

iii) Να αποδείξετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-e^{-\frac{3}{2}}, e^{-\frac{3}{2}}\right]$.

iv) α) Να βρείτε το πλήθος των ρίζων της εξίσωσης $f(x)=e^{\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $\rho_1+\rho_2=0$, όπου ρ_1,ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης.