

Έστω η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$ για την οποία ισχύουν:

- $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{1-x^2}}$, $x \in A - \{0\}$
- $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{4-x-x-2}}{\eta\mu 5x} + \frac{x+1}{4} \right)$

i) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

ii) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

iii) α) Να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το $f(A)$.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x = 1 \end{cases}$.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$h'(\xi) = \frac{h(\xi)}{2 - \xi}.$$

v) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\kappa}^{\kappa} h(x) dx$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ με $|\kappa| < 1$.