

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} για την οποία ισχύει

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x + \kappa h) - f'(x - \lambda h)}{(\kappa + \lambda)h} = e^x(x^2 - 4x + 3) + 2e^x(2x - 4) + 2e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να δείξετε ότι $f''(x) = e^x(x^2 - 4x + 3) + 2e^x(2x - 4) + 2e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν $f'(0) + 1 = \int_{-1}^1 (2x - \eta \mu x) dx$, να δείξετε ότι

$$f'(x) = e^x(x^2 - 4x + 3) + e^x(2x - 4), \quad x \in \mathbb{R}.$$

iii) Επιπλέον, αν $f(1) = \int_1^e \left(\ln x + \frac{1}{1-e} \right) dx$, να δείξετε ότι $f(x) = e^x(x^2 - 4x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$.

iv) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

v) Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \eta \mu x)$.

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^{\frac{1}{f(x)}} + \eta \mu x \right)$.