

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - x^2 - 2\ln(2x)$, $x > 0$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

ii) α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2x)^2 e^{-x^4} = e^{-x^2}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1 και x_2 με $0 < x_1 < \frac{1}{2}$ και $1 < x_2 < 2$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $(2x)^2 < e^{x^4 - x^2}$.

Έστω $g(x) = x^4 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$

iii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες

$$x = \frac{1}{2}, x = \frac{e}{2}.$$

iv) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + x_1) - f(x_2 - e^x + x + 1)}{f(e^x) + \ln 4}$.

v) Να αποδείξετε ότι $2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > f'(x_2)(x_1 - x_2)$.