

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $(x^2 - 1)f(x) = x \ln x$ για κάθε $x > 0$

- $f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\eta\mu 2x - \frac{2}{\pi} \right) dx$

i) Να βρεθεί το $f(0)$.

ii) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f .

$$\text{Έστω } f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x^2 - 1}, & 0 < x \neq 1 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, e)$ τέτοιο, ώστε $(e^2 - 1)f'(\xi) = 1$.

iv) Να βρεθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{f(x)}{x \ln x} dx$.