Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει $(1+|x|)f(x)<|x|$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και F παράγουσα της f. Επίσης, δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$ και η συνάρτηση $G(x)=\begin{cases} x+\ln(1-x)\ ,\ x<0 \\ x-\ln(1+x)\ ,\ x\geq 0 \end{cases}$.

i) Να αποδείξετε ότι η G είναι παράγουσα της g.

ii) α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $H=F-G$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(G(x)-x\right)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(G(x)-x\right)=-\infty$.

iii) α) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in\mathbb{R}$ ώστε $G(\xi)=\xi$.

β) Να δείξετε ότι $G(x)\geq x$ για κάθε $x\in(-\infty,\xi]$

και $G(x)\leq x$ για κάθε $x\in[\xi,+\infty)$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1\left(H(x)-x\right)dx>H(1)-\frac{1}{2}$.