

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2(2\ln x - 1), & x > 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$.

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 0$.

ii) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία της.

iii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

Δίνεται επιπλέον συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $2 + f(g(1) - 2) + f(g'(1) - 1) \leq 0$.

iv) Να δείξετε ότι $g(1) = 3$ και $g'(1) = 2$.

v) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 3}{\ln(x^2 - 1)}$.

β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 3}{f(x) + 1}$.

γ) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\ln(\pi x) - 1}$.

vi) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{\int_0^1 (-1 - f(x)) dx}{x - 1} - \frac{f(\gamma) + 1}{x + 1} = 0$, $0 < \gamma \neq 1$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(-1, 1)$.