

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(\eta\mu x)$ και $g(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x)$ ορισμένες στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

i) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς τη μονοτονία, τα κοίλα και να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

iii) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[\left(e^{f(x)} f'(x) \right)^2 + \left(e^{g(x)} g'(x) \right)^2 \right] dx = \frac{1}{2}.$$

$$\beta) \int_{\frac{1}{2}}^1 x \left(e^{f(x)} \right)^2 dx - \int_1^{\frac{1}{2}} x \left(e^{g(x)} \right)^2 dx = \frac{3}{8}.$$

$$\gamma) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} e^{f(x)} dx \geq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} e^{g(x)} dx, \text{ όπου } \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right).$$

$$\delta) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \left(e^{f(x)} - e^{g(x)} \right) dx \geq \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} 1 dx \text{ για κάθε } \alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right).$$

iv) Να δείξετε ότι $\left| e^{f(x)} - e^{f(y)} \right| + \left| e^{g(x)} - e^{g(y)} \right| \leq 2 |x - y|$ για κάθε $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.