

i) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 - 3x + x \ln x$ ,  $x > 0$ .

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι η  $f$  έχει μοναδική ρίζα  $x_0$  που βρίσκεται στο  $(2, e)$ .

ii) Δίνεται η συνάρτηση  $\varphi(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}x^2 + \frac{x^2}{2} \ln x$ ,  $x > 0$ .

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $\varphi$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $\varphi(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα, έστω  $x_1$  με  $x_1 \in (x_0, 4)$ , όπου  $x_0$  η ρίζα της  $f(x) = 0$ .

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g(x) = -\frac{x^2}{2} \ln x$  και

$h(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4}x^2$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο οι εφαπτόμενες σχηματίζουν με την  $y = f(x_0)$  τρίγωνο.

iv) Αν  $d(x) = |g(x) - h(x)|$ ,  $x \in (0, x_1]$ , να αποδείξετε ότι  $d_{\max} = -\varphi(x_0)$ .