

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$.

i) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2\sqrt{e}$ έχει δύο ακριβώς ρίζες.

iv) Έστω E το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x και τις ευθείες $x=1$ και $x=5$. Να δείξετε ότι $2E > e^2 - 4e + 36$.

v) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{x-1} + x - 2) + f(\ln(3-x) - x + 2) = 2e$ έχει μοναδική λύση στο $(1, 2)$.