

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

- $\frac{4}{x^2} f(x) = 2 \ln x - 3$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$
- $f(0) - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x - 1}{\eta \mu x}$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} (2 \ln x - 3), & x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

ii) α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Να δείξετε ότι η C_f εφάπτεται του άξονα $x'x$ στην αρχή των αξόνων.

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 3x + \frac{5}{4}$

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία και να δείξετε ότι σε ένα από αυτά δέχονται κοινή εφαπτομένη, η οποία και να βρεθεί.