

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f: [-e, e] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = e^2$ για κάθε $x \in [-e, e]$ και $f(0) > 0$.

i) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-e, e)$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{e^2 - x^2}$, $x \in [-e, e]$.

iii) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^e f^2(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^e (f^2(x) + f^2(e-x)) dx$$

$$\beta) \int_0^e \frac{2026^x}{2026^x + 2026^{e-x}} dx = \frac{e}{2}.$$

Επιπλέον δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$.

iv) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f^2 \circ g$.

v) Αν $h(x) = e^2 - x$, $x \in [0, e^2]$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f^2 και h .