

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f'(x)=e^{x-1-f(x)}-e^{\ln x-f(x)}$ για κάθε $x>0$
- $f(1)=-\ln 2$

i) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατο στο $(0,+\infty)$.

ii) Να δείξετε ότι
$$f(x)=\begin{cases} \ln\left(e^{x-1}-\frac{x^2}{2}\right), & x>0 \\ -1, & x=0 \end{cases}.$$

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(0,f(0))$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

iv) Να βρείτε το όριο $\lim_{x\rightarrow 1}\frac{f(x)+\ln 2}{e^{x-1}-x}$.