

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f'(x) - f(x) \ln |f(x)| = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = e$

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{e^{x-1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να δείξετε ότι $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \frac{e-1}{e}.$$

$$\beta) \int_0^1 \frac{f''(x)}{f(x)} dx > \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)} dx.$$

Επιπλέον, δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(xe)$, $x > 0$.

iv) α) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

β) Να εξετάσετε αν $h^{-1} = \varphi$, όπου $\varphi(x) = \ln x$, $x > 0$.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(\varphi(x)) = \frac{x^2 + 5x - 4}{x^2 + 1}$.