Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}-f'(x)+e^{-x}, & x>0\\ \kappa, & x=0\\ -x^2+\alpha, & x<0\end{cases}, \text{ όπου } \alpha\in\mathbb{R}\ ,\ \kappa=\int_0^1 xe^x\,dx .$$

i. Να δείξετε ότι $\alpha=\kappa=1$

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{e^x}, & x>0\\ -x^2+1, & x\le 0\end{cases}$.

iii. Να δείξετε ότι η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

iv. Να μελετήσετε την $f$ ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να δείξετε ότι η ανίσωση $f(e^x+x-2)+f(\ln(2-x)-x)\ge 2$ έχει ακριβώς μία ρίζα, στο $(0,1)$.

v. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της $C_f$ στο σημείο $M(1,f(1))$ και να δείξετε ότι διαπερνά την $C_f$ στο σημείο αυτό.

vi. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$ και τις ευθείες $y=1$ και $x=1$.

vii. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{x(x-1)}{e^{x-1}}\le 2-ef(x)\le x-1$ για κάθε $x\ge 1$.

viii. Έστω $F$ μία αρχική της $f$. Να υπολογίσετε τα όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{F(x)-F(0)-\dfrac{x^2}{2}}{x\ln x-x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\eta\mu(x-1)}{e\big(F(x)-F(1)\big)+\dfrac{x^2}{2}-3x+\dfrac{5}{2}}$.